4

OPTION B/L

Exercice 4.1.

Soit une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On extrait de cette urne simultanément et au hasard p jetons ($1 \leqslant p \leqslant n$) et on désigne par X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des p jetons tirés, et par Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des p jetons tirés.

1. a) Déterminer les lois de X et de Y.

b) Montrer que $n+1-X$ et Y ont la même loi.

2. a) Établir, pour q et n entiers naturels tels que $q \leqslant n$: $\sum\limits_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.

b) Déterminer les espérances et variances respectives de X et Y (on calculera $E(Y(Y+1))$).

c) Montrer que $E(XY) = \dfrac{(n+1)(n(p+1)+p)}{(p+1)(p+2)}$

d) Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Solution :

1. Un tirage correspond à une partie de $[\![1, n]\!]$ à p éléments. Ainsi Card $\Omega = \binom{n}{p}$ et $X(\Omega) = [\![1, n-p+1]\!]$.

Pour tout i de $X(\Omega)$, on a : $P(X = i) = \dfrac{\binom{n-i}{p-1}}{\binom{n}{p}}$ (nombre de façons de choisir $p-1$ boules parmi les $n-i$ de numéro compris entre $i+1$ et n)

De même $Y(\Omega) = [\![p, n]\!]$ et pour tout $j \in Y(\Omega)$: $P(Y = j) = \dfrac{\binom{j-1}{p-1}}{\binom{n}{p}}$ (nombre de façons de choisir $(p-1)$ boules parmi les $j-1$ de numéro compris entre 1 et $j-1$)

Remarque : Les variables aléatoires $n+1-X$ et Y suivent la même loi.

2. a) Formule classique qui se démontre, par exemple, par récurrence en utilisant la relation de Pascal : $\dbinom{n+1}{q+1} + \dbinom{n+1}{q} = \dbinom{n+2}{q+1}$.

b) On obtient :

$$E(Y) = \frac{1}{\binom{n}{p}} \sum_{j=p}^{n} j\binom{j-1}{p-1} = \frac{1}{\binom{n}{p}} \sum_{j=p}^{n} p\binom{j}{p} = \frac{p}{\binom{n}{p}}\binom{n+1}{p+1} = \frac{p(n+1)}{p+1}$$

Et la remarque de la question précédente donne $E(X) = n+1-E(Y) = \dfrac{n+1}{p+1}$.

On recommence pour le moment d'ordre 2, en calculant d'abord $E(Y(Y+1))$:

$$\begin{aligned} E(Y(Y+1)) &= \frac{1}{\binom{n}{p}} \sum_{j=p}^{n} j(j+1)\binom{j-1}{p-1} = \frac{p(p+1)}{\binom{n}{p}} \sum_{j=p}^{n} j\binom{j+1}{p+1} \\ &= \frac{p(n+1)(n+2)}{p+2} \end{aligned}$$

ce qui donne $E(Y^2) = \dfrac{p}{(p+1)(p+2)}(n+1)(n(p+1)+p)$, puis :

$$V(Y) = \frac{p}{(p+1)^2(p+2)}(n+1)(n-p) = V(X)$$

3. a) $Y = n+1-X \implies Y^2 = (n+1)Y - XY$ et

$$E(XY) = (n+1)E(Y) - E(Y^2) = \frac{(n+1)(n(p+1)+p)}{(p+1)(p+2)}.$$

b) On a alors : $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \dfrac{(n+1)(n-p)}{(p+1)^2(p+2)}$.

et :

$$\rho_{X,Y} = \begin{cases} \text{n'existe pas} & \text{si } p = n \\ 1/p & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 4.2.

Soit n un entier strictement positif. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ (d'inconnue x) admet une unique solution notée u_n.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - n) = 0$ (on pourra étudier le signe de $f_n(n+\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ fixé.)

3. Déterminer un équivalent simple de $u_n - n$.

Solution :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = 1 - \dfrac{2n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}$, donc : $f_n'(x) = \dfrac{2n}{(x+n)^2} + \mathrm{e}^{-x} > 0$. Ainsi la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$; de plus $f_n(0) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$ impliquent : il existe un unique réel $u_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2. a) On constate que $f_n(n) < 0$, donc $n < u_n$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) On a $f_n(n+1) = \dfrac{1}{2n+1} - \mathrm{e}^{-(n+1)} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{1}{2n+1}$ (négligeabilité classique).
Ainsi pour n assez grand, $f_n(n+1) > 0$ et alors $n < u_n < n+1$, ce qui montre que u_n est équivalent à n : par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

c) Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. On a :

$$f_n(n+\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2n+\varepsilon} - \mathrm{e}^{-n-\varepsilon} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \frac{\varepsilon}{2n+\varepsilon} \text{ (idem)}$$

On déduit qu'à partir d'un certain rang $n < u_n < n+\varepsilon$. Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - n) = 0$.

3. Posons $a_n = u_n - n$. Ainsi : $f_n(a_n + n) = f_n(u_n) = \dfrac{a_n}{a_n + 2n} - \mathrm{e}^{-a_n - n}$.
Donc :
$f_n(a_n + n) = 0 \iff \dfrac{a_n}{a_n+2n} = \mathrm{e}^{-a_n-n}$
et alors comme a_n est de limite nulle : $\dfrac{a_n}{2n} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \mathrm{e}^{-a_n}\mathrm{e}^{-n} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \mathrm{e}^{-n}$
Donc :

$$u_n - n = a_n \underset{(n\to\infty)}{\sim} 2n\mathrm{e}^{-n}$$

Exercice 4.3.

1. Montrer, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}\,dt$.
On note alors $F(x)$ sa valeur.

2. a) Déterminer les variations de F et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

b) On pose $F(0) = \alpha$. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de F au voisinage de 0.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence, pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_{n+1} = F(u_n)$$

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0, u_n \geqslant 0$.

b) Étudier la fonction g définie pour tout réel x positif par $g(x) = F(x) - x$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

c) Établir que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Solution :

1. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur tout intervalle de la forme $]-\infty, x]$. De plus, $0 \leqslant h(t) \leqslant \mathrm{e}^t$ dont l'intégrale est convergente sur $]-\infty, x]$. Ainsi F est bien définie, grâce au critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues et positives.

2. a) La fonction F est de classe C^1 en tant que primitive d'une fonction continue et on a, pour tout x réel, $F'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} > 0$. Par conséquent, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Lorsque x tend vers $-\infty$, $F(x)$ tend vers 0 comme reste d'intégrale convergente ;
- on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2} = +\infty$, donc, il existe $A > 0$ tel que pour $t \geqslant A$, $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2} > 1$. Comme $\displaystyle\int_A^x dt = (x - A) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

b) On a $F(x) = F(0) + xF'(0) + \dfrac{x^2}{2}F''(0) + o(x^2)$. Après calculs simples, $F'(0) = F''(0) = 1$ et

$$F(x) = \alpha + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

[On peut aussi « intégrer » le développement de F']

3. a) Montrons la propriété par récurrence sur n.
- Par définition $u_0 \geqslant 0$;
- supposons $u_n \geqslant 0$, pour un certain rang n, alors $u_{n+1} = F(u_n) \geqslant 0$, puisque pour tout x réel, $F(x) \geqslant 0$, car $h(t) > 0$.

b) Comme F est de classe C^1, g l'est également, et on a, pour tout réel x :

$$g'(x) = F'(x) - 1 = \frac{e^x - 1 - x^2}{1 + x^2}$$

Une étude rapide du numérateur $N(x) = e^x - 1 - x^2$ donne $N''(x) = e^x - 2$, d'où :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$N''(x)$	$-$	0	$+$
N'	$\searrow$	$1 - (\ln 2)^2$	$\nearrow$

Donc N' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et N est strictement croissante, telle que $N(0) = 0$ et donc :

$$N(x) = \begin{cases} \text{négative} & \text{sur } \mathbb{R}^- \\ \text{positive} & \text{sur } \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Par suite, la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a $g(0) = F(0) > 0$, donc $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$, ce qui montre que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

c) Supposons la suite $(u_n)_n$ bornée. Par croissance, cette suite convergerait vers une limite ℓ qui, par continuité de la fonction g, vérifierait $g(\ell) = 0$. Or la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ est $x = 0$. Comme $\ell \geqslant u_1 > 0$, c'est impossible.

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4.4.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \int_0^x \exp(nt^2)\, dt - \int_x^1 \exp(-nt^2)\, dt$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $[0, 1]$.

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une solution et une seule que l'on note x_n. Calculer x_0.

3. Pour $x \in [0, 1]$, comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$. Que peut-on en déduire pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4. Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Solution :

1. Les fonctions à intégrer sont continues sur $\mathbb{R}$, donc f_n est en particulier de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, avec : $f'_n(x) = e^{nx^2} - (-e^{-nx^2}) = e^{nx^2} + e^{-nx^2}$.

2. Ainsi f_n est strictement croissante sur $[0,1]$. Avec $f_n(0) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2} dt < 0$ et $f_n(1) = \int_0^1 \mathrm{e}^{nt^2} dt > 0$.
Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution et une seule notée x_n.
Facilement $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

3. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}(\mathrm{e}^{t^2} - 1)\,dt + \int_x^1 \mathrm{e}^{-nt^2}(1 - \mathrm{e}^{-t^2})\,dt > 0$
Par conséquent $f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ et donc $x_n > x_{n+1}$. Monotone et bornée, la suite (x_n) est convergente.

4. Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque.
$\to \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \mathrm{e}^{nt^2}\,dt \geqslant \int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} \mathrm{e}^{nt^2}\,dt \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\exp(n\varepsilon^2/4) \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} +\infty$ (limite classique)
$\to \displaystyle\int_{\varepsilon}^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,dt \leqslant 1$ (banal)
Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\varepsilon) = +\infty$ et, à partir d'un certain rang, $f_n(\varepsilon) > 0$, et alors $x_n \leqslant \varepsilon$.
Cela signifie exactement que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Exercice 4.5.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, Id l'application identique de E. On appelle trace d'une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{C}$ et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme de ses n éléments diagonaux et on peut utiliser sans démonstration le fait que tr est une forme linéaire telle que si A et B sont deux matrices d'ordre n sur $\mathbb{C}$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et α un élément non nul de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il n'existe pas d'élément inversible $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f + \alpha Id = g^{-1} \circ f \circ g$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ et que si $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$, alors $\mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^{k+2})$).
b) Énoncer et démontrer des propriétés analogues pour les sous-espaces $\mathrm{Im}(u^k)$.
c) Démontrer que si $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, alors $\mathrm{Ker}(u^k) = \{0\}$. En déduire que pour tout élément $u \in \mathcal{L}(E)$, on a :
$$\mathrm{Ker}(u^n) = \mathrm{Ker}(u^{n+1}).$$

d) Énoncer et démontrer des propriétés analogues concernant les images.

e) Montrer que l'on a : $E = \mathrm{Ker}(u^n) \oplus \mathrm{Im}(u^n)$.

3. On considère les couples (u, v) d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient la propriété (P) suivante :

$$(P) \quad : \quad u \circ v - v \circ u = u.$$

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $u^k \circ v - v \circ u^k = ku$.

b) On veut montrer que u^n est l'endomorphisme nul. Pour cela on suppose que $F = \mathrm{Im}(u^n) \neq \{0\}$.
Montrer que F est stable par u^n et v.
Soient f et g les endomorphismes induits respectivement par u^n et v sur F.
Montrer que f est bijectif. Exprimer $f \circ g - g \circ f$ en fonction de f et en déduire une contradiction. Conclure.

Solution :

1. Si c'était le cas, on devrait avoir $\mathrm{tr}(f + \alpha I) = \mathrm{tr}(f)$, donc $\mathrm{tr}(\alpha I) = n\alpha = 0$, ce qui est contradictoire.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Si $u^k(x) = 0$, il est évident que $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = 0$. Supposons que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$, et soit $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+2})$. On a $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^k)$ donc $u^{k+1}(x) = 0$ et $\mathrm{Ker}(u^{k+2}) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. L'inclusion contraire étant banale, on a bien l'égalité.

b) L'inclusion $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k)$ est banale. L'égalité des noyaux, jointe à la formule du rang donne alors l'égalité des images correspondantes.

c) La première propriété découle de ce qui précède. L'espace E étant de dimension n, on a soit $\mathrm{Ker}(u^n) = 0$, si les inclusions du a) sont strictes jusqu'à l'ordre n, et dans ce cas l'égalité demandée est acquise, soit l'égalité a eu lieu avant et subsiste à l'ordre n.

d) De la même manière, on obtient : $\mathrm{Im}(u^n) = \mathrm{Im}(u^{n+1})$.

e) Comme la somme des dimensions vaut n, il suffit de montrer que l'intersection est réduite au vecteur nul. Soit $F = \mathrm{Im}(u^n)$; on a $u(F) = F$ et u induit un isomorphisme sur F et $\mathrm{Ker}(u_{|F}) = 0$. Si $x \in F \cap \mathrm{Ker}(u^n)$, $u^n(x) = 0$; or u^n induit également un isomorphisme sur F, donc $x = 0$.

3. a) On montre la propriété par récurrence sur k.

b) D'après ce qui précède, F est stable par u^n et par v d'après l'égalité $u^n \circ v - v \circ u^n = nu^n$.

Soit $f = (u^n)_{|F}$; d'après 2.d on a $f(F)) = F$, d'où f est bijective. De l'égalité $f \circ g - g \circ f = nf$, on déduit alors, $g - nI = f^{-1} \circ g \circ f$, ce qui est impossible d'après la première question. Donc $F = 0$ et par suite $\mathrm{Ker}(u^n) = E$.

Exercice 4.6.

Dans un stand de tir, un joueur dispose de n fléchettes (n fixé, supérieur ou égal à 2) pour tenter de faire éclater un ballon. A chaque essai, la probabilité de succès vaut p (avec $0 < p < 1$) et donc la probabilité de l'échec vaut q (avec $q = 1 - p$). On suppose que les différents essais sont indépendants les uns des autres et que le joueur s'arrête dès que le ballon éclate (s'il éclate !).

1. Soit X le nombre aléatoire de fléchettes utilisées par le joueur.

a) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

b) Déterminer la loi de X et démontrer que si l'on note $E(X)$ son espérance, on a : $E(X) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$

2. Sachant que le ballon a éclaté, quelle est la probabilité que ce soit avec la $n^{\text{ème}}$ fléchette ?

3. Dans cette question, on suppose que l'on a $p = \dfrac{1}{2}$.

Si le joueur fait éclater le ballon avec la $k^{\text{ème}}$ fléchette (k compris entre 1 et n), il a le droit de lancer $n+1-k$ fois une pièce équilibrée et il reçoit 1 euro pour chaque «pile» obtenu (s'il ne fait pas éclater le ballon, le jeu s'arrête).

Soit Y le gain aléatoire de ce joueur.

a) Montrer que Y prend toute valeur entière comprise entre 0 et n.

b) Déterminer la loi de Y. (On mettra à part le calcul de $P(Y = 0)$)

Solution :

1. a) On a $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

b) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(X = k) = q^{k-1}p = q^{k-1} - q^k$ (on a eu $(k-1)$ échecs puis un succès).

Réaliser l'événement $(X = n)$, c'est échouer aux $n - 1$ premiers essais (et le résultat de la $n^{\text{ème}}$ expérience est quelconque). Donc $P(X = n) = q^{n-1}$.

Puisque X est bornée, l'espérance $E(X)$ existe, et on a :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n-1} k(q^{k-1} - q^k) + nq^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)q^k - \sum_{k=1}^{n-1} kq^k + nq^{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)q^k - \sum_{k=0}^{n-1} kq^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

[On peut aussi appliquer la formule donnant la somme des premiers termes d'une progression géométrique et la formule dérivée...]

2. Soit A l'événement «le ballon éclate». Alors : $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - q^n$.
Soit B l'événement « le ballon éclate au dernier coup». Alors $P(B) = q^{n-1}p$.
Donc : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{q^{n-1}p}{1-q^n}$.

3. a) $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
(Au pire on rate tous ses tirs, au mieux le ballon éclate au premier coup et ensuite on peut obtenir de 0 à n «pile»)

b) $((X = 0), (X = 1), \ldots, (X = n), R)$, où R est l'événement «le ballon sort intact de ce jeu», est un système complet d'événements.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$P(Y = i) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P_{(X=k)}(Y = i) + P(R \cap (Y = i))$$

$$P(Y = i) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P_{(X=k)}(Y = i)$$

$$= \sum_{k \geq 1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \times \binom{n+1-k}{i} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1-k} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k\geq 1} \binom{n+1-k}{i}$$

La sommation est en fait étendue aux valeurs de k pour lesquelles $n+1-k \geqslant i$, donc k varie de 1 à $n + 1 - i$ et :

$$P(Y = i) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n-1}{i} + \cdots + \binom{i}{i}\right] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} \binom{n+1}{i+1}$$

(itération de la formule de Pascal)

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(Y = i) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} \big(2^{n+1} - 1 - (n + 1)\big) = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$
et $P(Y = 0) = \dfrac{n+2}{2^{n+1}}$, ce que l'on peut obtenir aussi directement en se référant encore au même système complet ....

Exercice 4.7.

p étant un entier fixé, avec $p \geqslant 2$, on note $E = \mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
f est l'application qui à tout polynôme P de E associe :

$$f(P) = P(X + 2) + P(X) - 2P(X + 1).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E

2. Déterminer l'image et le noyau de f.

3. Soit $A \in E$. A quelle condition l'équation $f(P) = A$ a-t-elle au moins une solution ? Si U est une solution, quelles sont toutes les solutions ?

4. On définit les polynômes $P_0, \ldots, P_p$ par :

$P_0 = 1, P_1 = X$, et pour $k \geqslant 2, f(P_k) = P_{k-2}$, avec $P_k(0) = P_k(1) = 0$.

a) Montrer que les polynômes $P_0, \ldots, P_p$ sont ainsi bien définis.

b) Pour $k \in [\![0, p]\!]$, quel est le terme de plus haut degré de P_k ?

Solution :

1. $\star$ Tout d'abord, il est clair que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à p, il en est de même du polynôme $P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$.

$\star$ D'autre part, par propriétés des opérations, on vérifie aisément que f est linéaire.

Ainsi f est un endomorphisme de E.

2. On a : $f(1) = 0$, $f(X) = 0$ et pour $k \in [\![2, p]\!]$:

$$f(X^k) = (X+2)^k + X^k - 2(X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 2^{k-i} X^i + X^k - 2\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$$

les termes en X^k et X^{k-1} disparaissent et $f(X^k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i}(2^{k-i} - 2)X^i$.

Ainsi, pour $k \geqslant 2$, $f(X^k)$ est un polynôme de degré exactement $k-2$.

$\star$ On a : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(1), f(X), \ldots, f(X^p)\big) = \operatorname{Vect}\big(f(X^2), \ldots, f(X^p)\big)$.

Or $f(X^2), \ldots, f(X^p)$ sont des polynômes de degrés échelonnés depuis 0 jusqu'à $k-2$, ils forment donc une base de $\mathbb{R}_{p-2}[X]$, et une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Par conséquent $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_{p-2}[X]$.

$\star$ Par le théorème du rang, $\operatorname{Ker} f$ est donc un espace vectoriel de dimension 2, et comme il contient 1 et X, on a : $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}_1[X]$.

3. L'équation $f(P) = A$, d'inconnue $P \in E$ admet au moins une solution si et seulement si $A \in \operatorname{Im} f$ et si U est une solution, toutes les solutions sont de la forme $U + a + bX$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, puisque l'on a alors :

$$f(P) = A \iff f(P) = f(U) \iff P - U \in \operatorname{Ker} f.$$

4. a) Les polynômes $P_0 = 1$ et $P_1 = X$ sont définis. Soit alors $k \in [\![1, p-1]\!]$ et supposons $P_0, P_1, \ldots, P_k$ bien définis, avec $\deg P_i = i$.

Comme $\deg P_{k-1} = k - 1 \leqslant p - 2$, l'équation $f(P) = P_{k-1}$ admet une infinité de solutions, toutes de degré $k+1$ et de la forme $P = U + a + bX$, où U est un des polynômes vérifiant $f(U) = P_{k-1}$.

Les conditions $P(0) = P(1) = 0$ déterminent parfaitement a et b, ce qui montre qu'il existe une solution au problème et une seule, que l'on note P_{k+1}. On conclut par le principe de récurrence, limité au rang p.

b) Ecrivons $P_k = \alpha_k X^k + \cdots$ et $P_{k-2} = \alpha_{k-2} X^{k-2} + \cdots$.
Le coefficient du terme de plus haut degré de $f(P_k)$ est

$$\alpha_k \binom{k}{k-2} \big(2^{k-(k-2)} - 2\big) = k(k-1)\alpha_k.$$

Ainsi $\alpha_{k-2} = k(k-1)\alpha_k$ et comme $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, il vient $\alpha_k = \dfrac{1}{k!}$ (même pour $k = 0$ et $k = 1$) :

$$P_k = \frac{1}{k!} X^k + \cdots$$

Exercice 4.8.

Soit Φ l'application qui à tout polynôme réel P associe le polynôme :

$$Q = \Phi(P) = (X - a)[P'(X) + P'(a)] - 2.[P(X) - P(a)].$$

où a est un nombre réel donné.

1.Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

3. a) Soit P un polynôme quelconque et $Q = \Phi(P)$. Calculer $Q(a)$, $Q'(a)$ et $Q''(a)$.

b) i) Soit λ une valeur propre non nulle de Φ (s'il en existe) et P un polynôme propre associé. Montrer que a est racine d'ordre k de P avec $k \geqslant 3$.

ii) Soit P un polynôme de la forme $P(X) = (X - a)^k R(X)$, avec $k \geqslant 3$ et $R(a) \neq 0$. Montrer que P est propre pour Φ si et seulement si R est un polynôme constant, la valeur propre correspondante valant $k - 2$.

iii) En déduire les éléments propres de Φ.

Solution :

1. Il est clair que si P est un polynôme, alors $Q = \Phi(P)$ est encore un polynôme. La linéarité de Φ résulte de la linéarité de la dérivation et des propriétés des opérations.

2. Soit P tel que $\deg P = n$. On a :

$P(X) = a_n X^n + \cdots$, $XP'(X) = n.a_n X^n + \cdots$.

Par conséquent $\Phi(P) = (n - 2)a_n X^n + \cdots$ Le noyau de Φ ne peut contenir que des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Il suffit de faire le calcul pour vérifier que ces polynômes conviennent :

$$\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathbb{R}_2[X]$$

3. a) $Q(a) = 0$ est trivial, et en dérivant, on voit que $Q'(a) = Q''(a) = 0$.

b) i) On a : $Q = \Phi(P) = \lambda P$. Comme $\lambda \neq 0$: $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$ et a est racine de P à un ordre au moins égal à 3.

ii) Soit $P=(X-a)^k R$, en dérivant et en remplaçant, on obtient :

$$\Phi(P)=\lambda P \iff (k-2-\lambda)R+(X-a)R'=0$$

Comme $R(a)\neq 0$: $\lambda=k-2$, et en remplaçant : $(X-a)R'=0$, soit $R'=0$ et R est un polynôme constant.

iii) On vérifie que, pour tout $k\in\mathbb{N}, k\geqslant 3$, $(X-a)^k$ est propre pour Φ associé à la valeur propre $k-2$. Puisque 0 est également valeur propre, on conclut :

Les valeurs propres de Φ sont les entiers naturels, avec :

$$E_{(0)}(\Phi)=\mathbb{R}_2[X],\ \forall k\in\mathbb{N}^*, E_{(k)}(\Phi)=\text{ Vect }[(X-a)^{k+2}]$$

Exercice 4.9.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geqslant 10$, on considère la fonction polynôme P_n définie par :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}, P_n(x)=(x-1)(2-x)+\frac{1}{n}\,x^3$$

1. Dresser le tableau des variations de P_n, en déduire que P_n possède un maximum et un minimum locaux en deux points notés respectivement α_n et β_n.

2. a) Montrer que la suite (α_n) converge et préciser sa limite.

b) Déterminer un équivalent simple de β_n lorsque n tend vers l'infini.

3. a) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(\frac{2n}{3})$. En déduire qu'à partir d'un certain rang, P_n possède trois racines notées dans l'ordre croissant a_n, b_n et c_n.

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante à partir d'un certain rang. En déduire qu'elle est convergente. Donner le développement limité à l'ordre 1 de a_n.

b) Montrer que la suite (b_n) converge, puis donner un développement limité à l'ordre 1 de b_n.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=+\infty$ et déterminer un équivalent de c_n.

Solution :

1. On a $P_n'(x)=3-2x+\dfrac{3}{n}\,x^2$, de discriminant $\Delta=(-2)^2-4\times\dfrac{9}{n}=4(1-\dfrac{9}{n})>0$

Ainsi P_n' s'annule en $\alpha_n=\dfrac{n(1-\sqrt{1-9/n})}{3}>0$ et $\beta_n=\dfrac{n(1+\sqrt{1-9/n})}{3}$ d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		α_n		β_n		$+\infty$
$P_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. a) $\alpha_n = \frac{n}{3}(1-(1-\frac{9}{2n}+o(\frac{1}{n})) = \frac{3}{2}+o(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$

b) Comme $1-\frac{9}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, il vient $\beta_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{2n}{3}$.

3. a) $P_n(0) = -2 < 0$, $P_n(1) = \frac{1}{n} > 0$, $P_n(\frac{2n}{3}) = -2+2n-\frac{4n^2}{27}$.
Donc pour n assez grand, $P_n(\frac{2n}{3}) < 0$.
Ainsi, pour n assez grand, P_n admet au moins une racine entre $-\infty$ et 1, une autre entre 1 et $\frac{2n}{3}$ et une troisième entre $\frac{2n}{3}$ et $+\infty$. En superposant au tableau de variations précédent, on a donc pour n assez grand :

$$0 < a_n < 1 < \alpha_n < b_n < \beta_n < c_n$$

b) On a $P_{n+1}(a_n) = P_{n+1}(a_n) - P_n(a_n) = (\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n})a_n^3 < 0$, et comme, pour n assez grand, P_{n+1} est croissante sur $]-\infty, 1]$, on a alors $a_n \leqslant a_{n+1}$ et (a_n) est croissante à partir d'un certain rang. Etant majorée elle converge et si on note ℓ sa limite, il vient $(\ell-1)(2-\ell)+0 = 0$ et seule $\ell = 1$ convient.
Posons $a_n = 1+\varepsilon_n$, il vient $\varepsilon_n(1-\varepsilon_n) = -\frac{1}{n}(1+\varepsilon_n)^3$ et donc $\varepsilon_n \underset{(\infty)}{\sim} -\frac{1}{n}$:

$$a_n = 1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})$$

b) $P_n(2) > 0$ et $P_n(2+\varepsilon) = -\varepsilon(1+\varepsilon)+\frac{1}{n}(2+\varepsilon)^3$, donc à partir d'un certain rang $2 < b_n < 2+\varepsilon$ (c_n est trop grand !), ce qui signifie exactement que :

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 2$$

Si on pose $b_n = 2+\varepsilon_n$, il vient $\varepsilon_n(1+\varepsilon_n) = \frac{1}{n}(2+\varepsilon_n)^3$ et donc $\varepsilon_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{8}{n}$

$$b_n = 2+\frac{8}{n}+o(\frac{1}{n})$$

c) Enfin $c_n > \beta_n$ donne immédiatement $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$.
Donc $\frac{1}{n}c_n^3 = c_n^2-3c_n+2 \underset{(\infty)}{\sim} c_n^2$ et $\frac{c_n}{n} \underset{(\infty)}{\sim} 1$, *i.e.* $c_n \underset{(\infty)}{\sim} n$.

Exercice 4.10.

On considère une urne contenant N boules indiscernables au toucher, numérotées $1, 2, \ldots, N$, avec $N \in \mathbb{N}^*$. On effectue dans cette urne des tirages d'une boule avec remise à chaque fois de la boule tirée. Soit $r \in [\![1, N]\!]$. On choisit r numéros entre 1 et N et l'on note Y_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les r numéros choisis.

1. Déterminer la loi de Y_1, son espérance et sa variance.

2. a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$P(Y_2=n)=\sum_{k=1}^{n-1}\big(\frac{N-2}{N}\big)^{k-1}\frac{2}{N}\big(\frac{N-1}{N}\big)^{n-k-1}.$$

En déduire une expression de $P(Y_2=n)$ sans signe $\sum$.

b) Montrer que Y_2 admet une espérance et la calculer.

3. Désormais, r est quelconque.

a) Déterminer $Y_r(\Omega)$.

b) Calculer $P(Y_r=r)$.

c) Déterminer l'espérance de Y_r.

Solution :

1. Y_1 suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{N}$, donc :

$$E(Y_1)=\frac{1}{\frac{1}{N}}=N \text{ et } V(Y_1)=\frac{1-\frac{1}{N}}{\frac{1}{N^2}}=N(N-1).$$

2. On a $Y_2(\Omega)=[\![2,+\infty[\![$. Soit alors $n\geqslant 2$; l'événement $(Y_2=n)$ est réalisé si on obtient un des deux numéros choisis à un certain rang k compris entre 1 et $n-1$, puis le deuxième numéro choisi au n-ième tirage. Ainsi les tirages dont le rang est compris entre 1 et $k-1$ (s'il y en a) amènent l'un des $N-2$ autres numéros, le k-ième tirage amène l'un des deux numéros choisis, les tirages de rang compris entre $k+1$ et $n-1$ (s'il y en a) n'amènent pas l'autre numéro choisi (mais on peut réobtenir le numéro obtenu au rang k et le $n^{\text{ème}}$ tirage amène l'autre numéro choisi. Bref, par équiprobabilité de toutes les listes de tirages :

$$\begin{aligned}P(Y_2=n)&=\sum_{k=1}^{n-1}\big(\frac{N-2}{N}\big)^{k-1}\frac{2}{N}\big(\frac{N-1}{N}\big)^{n-k-1}\\&=\frac{2(N-2)^{n-2}}{N^n}\sum_{k=1}^{n-1}\big(\frac{N-1}{N}\big)^{k-1}\end{aligned}$$

Par l'identité géométrique, on en déduit, après simplification :

$$\forall\, n\geqslant 2, P(Y_2=n)=\frac{2}{N}\Big(\big(\frac{N-1}{N}\big)^{n-1}-\big(\frac{N-2}{N}\big)^{n-1}\Big)$$

3. a) $Y_r(\Omega)=[\![r,+\infty[\![$.

b) $(Y_r=r)$ est réalisé si et seulement si les r premiers tirages amènent les r numéros choisis, mais dans un ordre quelconque, donc :

$$P(Y_r=r)=\frac{r!}{N^r}$$

c) Pour $i\in[\![2,r]\!]$, notons X_i la variable aléatoire qui mesure le nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir un i-ième numéro choisi, après en avoir

déjà obtenu $i-1$, et X_1 la variable aléatoire qui mesure le nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir un premier numéro choisi.
On a $Y_r = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ et pour tout i, X_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{r-i+1}{N}$, d'où :

$$E(Y_r) = N\big(\frac{1}{r} + \frac{1}{r-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\big)$$