4

Option B/L

Exercice 4.01.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ suivant la loi normale centrée réduite. On note respectivement φ et Φ une densité et la fonction de répartition de X (donc de Y).
On définit $Z = \sup(X, Y)$.

1. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité. Exprimer une densité g de Z en fonction de φ et Φ.

2. Montrer que Z admet une espérance et calculer $E(Z)$.

3. Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi. En déduire la variance $V(Z)$ de Z.

Solution

1. L'application Z est une variable aléatoire car, pour tout x,

$$[Z \leqslant x] = [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]$$

est un élément de la tribu $\mathcal{B}$.
La variable aléatoire Z prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et pour tout x réel :

$F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]) = P(X \leqslant x)P(Y \leqslant x) = \Phi^2(x)$

Ainsi une densité de Z est $g(x) = 2\varphi(x)\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\Phi(x)$.

2. Soit (A, B) réels. On procède à une intégration par parties :

On a : $\displaystyle\int_A^B xg(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B x\mathrm{e}^{-x^2/2}\Phi(x)dx$

$$\int_A^B xg(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-\mathrm{e}^{-x^2/2}\Phi(x)\right]_A^B + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B \mathrm{e}^{-x^2/2}\Phi'(x)dx$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-\mathrm{e}^{-x^2/2}\Phi(x)\right]_A^B + \frac{1}{\pi}\int_A^B \mathrm{e}^{-x^2}dx$$

Or $\lim\limits_{A\to-\infty} \mathrm{e}^{-A^2/2}\Phi(A) = 0$ et $\lim\limits_{B\to+\infty} \mathrm{e}^{-B^2/2}\Phi(B) = 0$ et la convergence de l'intégrale résiduelle est connue.

Ainsi $E(Z)$ existe et :

$$E(Z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\frac{dt}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$$
$$E(Z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

3. Les variables aléatoires X^2 et Z^2 sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x > 0$:

$$P(Z^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant Z \leqslant \sqrt{x}) = \Phi^2(\sqrt{x}) - \Phi^2(-\sqrt{x})$$
$$= \Phi^2(\sqrt{x}) - (1-\Phi(\sqrt{x}))^2 = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$$

et :

$$P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$$

ce qui montre que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

Donc :

$$E(Z^2) = E(X^2) = 1 \text{ et } V(Z^2) = 1 - \frac{1}{\pi}$$

Exercice 4.02.

Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}dt$ est un élément de E.

On note T l'endomorphisme de E défini par : pour tout $f \in E$

$$T(f) : x \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

2. La restriction de T à $\mathbb{R}[x]$, l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles, induit-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$?

3. Montrer que T est injectif.

4. Montrer que $\operatorname{Im} T = \{g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ g(0) = 0\}$.

5. Déterminer les éléments propres de T, c'est-à-dire les couples $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E$, avec $f \neq 0$, tels que $T(f) = \lambda f$.

Solution

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur n'est jamais nul. Le théorème fondamental du calcul intégral permet d'affirmer que $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc est en particulier continue sur $\mathbb{R}$.
L'application T est manifestement linéaire (par linéarité de l'intégration) : aussi T est-il un endomorphisme de E.

2. La réponse est non. Par exemple $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = 2(\sqrt{1+x^2}-1)$ et la fonction ainsi définie n'est pas polynomiale.

3. Supposons que $f \in \operatorname{Ker} T$. En dérivant, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ donc $f(x) = 0$.

4. Soit $g \in \operatorname{Im} T$. Alors g est dérivable (question 1) et $g(0) = 0$. Réciproquement soit $h \in \{g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / g(0) = 0\}$.
Posons $f(x) = \sqrt{1+x^2}h'(x)$. Alors $f \in E$ et

$$\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int_0^x h'(t)dt = h(x) - h(0) = h(x)$$

5. Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E$ un couple propre.
Ainsi, pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}dt = \lambda f(x)$

- $\lambda = 0$ donne $f = 0$ (question 3).
- $\lambda \neq 0$, permet de voir (en divisant par λ que $f \in C^1(\mathbb{R})$). En dérivant, il vient, pour tout x réel : $\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \lambda f'(x)$, *i.e.* $\lambda f'(x)\sqrt{1+x^2} - f(x) = 0$.

Cette équation différentielle du premier ordre se résout en $f(x) = K\mathrm{e}^{F(x)/\lambda}$, où F est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
Or $T(f) = \lambda f$ entraîne que $f(0) = 0$, donc que $K = 0$. Ainsi T n'admet aucune valeur propre, donc aucun vecteur propre.

Exercice 4.03.

Une urne contient n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n. On extrait les boules une par une avec remise à chaque fois de la boule tirée.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire X_i définie par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si au } i^{\text{ème}} \text{ tirage on obtient un numéro non déjà tiré} \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable Y_k qui prend pour valeurs le nombre de numéros distincts obtenus à l'issue des k premiers tirages.

1. Déterminer les lois de X_1, de X_2 et de X_3.

2. Exprimer Y_k en fonction des $(X_i)_{1\leq i\leq k}$, puis donner l'expression de l'espérance de Y_k en fonction de celles des X_i pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

3. En raisonnant par récurrence, déterminer la loi des X_i, puis l'espérance de Y_k.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_k(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(Y_k = i)x^i$.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, $g_{k+1}(x) = \dfrac{x(1-x)}{n} g_k'(x) + x g_k(x)$.

b) Exprimer $E(Y_k)$ en fonction de g_k et montrer que $E(Y_{k+1}) = (1-\frac{1}{n})E(Y_k)+1$.

c) Retrouver ainsi la valeur de $E(Y_k)$.

Solution

1. Notons N_j la variable égale au numéro obtenu au $j^{\text{ème}}$ tirage : N_j suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

$\star$ X_1 est la variable certaine égale à 1.

$\star$ $P(X_2 = 1) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(N_1 = i)P_{N_1=i}(X_2 = 1) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n}$:

X_2 suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1 - \frac{1}{n})$.

$\star$ $P(X_3 = 1) = P(X_2 = 1)P_{(X_2=1)}(X_3 = 1) + P(X_2 = 0)P_{(X_2=0)}(X_3 = 1)$

$$= (1 - \frac{1}{n})\frac{n-2}{n} + \frac{1}{n}\frac{n-1}{n} = (1 - \frac{1}{n})^2$$

Car si $(X_2 = 1)$ est réalisé, il y a 2 numéros distincts déjà obtenus, tandis que si $(X_2 = 0)$ est réalisé il n'y en a qu'un. Ainsi

X_3 suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}((1 - \frac{1}{n})^2)$.

2. On a $Y_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$, donc $E(Y_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} E(X_i)$.

Montrons que : $\forall i \in [\![1, k]\!]$, X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}((1 - \frac{1}{n})^{i-1})$.

- Le résultat est vrai pour $i = 1, 2, 3$.
- La famille $(Y_k = j)_{1\leq j\leq k}$ est un système complet d'événements. Ainsi :

$$P(X_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^{k} P(Y_k = j)P_{(Y_k=j)}(X_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^{k} P(Y_k = j)\frac{n-j}{n}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} P(Y_k = j) - \sum_{j=1}^{k} P(Y_k = j)\frac{j}{n}$$

$$P(X_{k+1}=1)=1-\frac{1}{n}E(Y_k)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{n})^{i-1} \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$
$$=1-\frac{1}{n}\times\frac{1-(1-\frac{1}{n})^k}{1-(1-\frac{1}{n})}=1-(1-(1-\frac{1}{n})^k)=(1-\frac{1}{n})^k$$

La propriété est héréditaire et donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, X_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}((1-\frac{1}{n})^k)$.

Enfin $E(Y_k)=\sum_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{n})^{i-1}=n(1-(1-\frac{1}{n})^k)$ d'après le calcul précédent.

4. a) On a :

$$\begin{aligned}
g_{k+1}(x) &= \sum_{i=1}^{k+1} P(Y_{k+1}=i)x^i \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \left(P[((Y_{k+1}=i)\cap(Y_k=i))\cup((Y_{k+1}=i)\cap(Y_k=i-1))]\right)x^i \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} P[(Y_{k+1}=i)\cap(Y_k=i)]x^i+\sum_{i=2}^{k+1} P[(Y_{k+1}=i)\cap(Y_k=i-1)]x^i \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} P(Y_k=i)\frac{i}{n}x^i+\sum_{i=2}^{k+1} P(Y_k=i-1)\frac{n-(i-1)}{n}x^i \\
&= \frac{x}{n}g_k'(x)+\sum_{j=1}^{k} P(Y_k=j)\frac{n-j}{n}x^{j+1}=\frac{x}{n}g_k'(x)+xg_k(x)-\frac{x^2}{n}g_k'(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$, $g_{k+1}(x)=\dfrac{x(1-x)}{n}g_k'(x)+xg_k(x)$.

b) Pour tout k, on a : $g_k(1)=1$ et $g_k'(1)=E(Y_k)$. Donc, on dérive :

$$g_{k+1}'(x)=\frac{1-2x}{n}g_k'(x)+\frac{x(1-x)}{n}g_k''(x)+g_k'(x)+g_k(x)$$

et on évalue l'expression obtenue en $x=1$:

$$E(Y_{k+1})=(1-\frac{1}{n})E(Y_k)+1$$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique de raison $1-\frac{1}{n}$ et de point fixe n.

Ainsi, pour tout k : $E(Y_k)=n+(1-\frac{1}{n})^{k-1}(E(Y_1)-n)$ et comme $E(Y_1)=1$:

$$E(Y_k)=n(1-(1-\frac{1}{n})^k)$$

Exercice 4.04.

Deux joueurs J_1 et J_2 jouent l'un après l'autre (J_1 puis J_2, puis J_1, puis J_2, etc.). Lorsque c'est son tour, chaque joueur doit effectuer un coup qu'il réussit avec une probabilité $p_1\in]0,1[$ pour le joueur J_1 et une probabilité $p_2\in]0,1[$ pour le joueur J_2 ; tous les coups sont indépendants. Le jeu se termine dès qu'un joueur réussit son coup, auquel cas il gagne. On note $q_1=1-p_1$ et $q_2=1-p_2$.

1. Calculer la probabilité de l'évènement G_1 « le joueur J_1 gagne » (resp. de G_2 « le joueur J_2 gagne »).

2. Vérifier que le jeu se termine de façon quasi certaine au bout d'un nombre fini de coups. Quelle condition doivent vérifier p_1 et p_2 pour que le jeu soit équitable (*i.e.* pour que $P(G_1) = P(G_2) = \frac{1}{2}$) ?

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de coups joués jusqu'à la fin du jeu. Calculer l'espérance de T.

On suppose désormais qu'il y a une infinité de joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$ qui réussissent leurs coups (toujours indépendamment les uns des autres) avec des probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ ($p_i \in]0,1[$) ; ainsi un joueur qui accède au jeu, mais qui n'a pas gagné à son tour est éliminé et la « main » ne lui revient plus. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $q_n = 1 - p_n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de l'évènement G_n « le joueur J_n gagne ». Le jeu peut-il être équitable ?

5. À quelle condition (analytique) sur les nombres $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ le jeu se termine-t-il quasiment-toujours au bout d'un nombre fini de coups ? Donner un exemple de valeurs de q_n pour lequel c'est le cas et un exemple de valeurs de q_n pour lequel ce n'est pas le cas.

Solution

1. $\star$ Le joueur 1 gagne s'il réussit un coup de numéro impair alors que tous les coups précédents ont raté, donc : $P(G_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^n p_1 = \frac{p_1}{1 - q_1 q_2}$.

$\star$ Le joueur 2 gagne s'il réussit un coup de numéro pair alors que tous les coups précédents ont raté, donc : $P(G_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_1 (q_2 q_1)^n p_2 = \frac{q_1 p_2}{1 - q_1 q_2}$.

2. On a :

$P(G_1) + P(G_2) = \frac{p_1}{1 - q_1 q_2} + \frac{q_1 p_2}{1 - q_1 q_2} = \frac{(1 - q_1) + q_1(1 - q_2)}{1 - q_1 q_2} = 1$,donc le jeu s'achève quasi-certainement.

Comme $P(G_1) + P(G_1) = 1$ la condition équivaut à : $P(G_1) = P(G_2)$, soit $\frac{p_1}{1 - q_1 q_2} = \frac{q_1 p_2}{1 - q_1 q_2}$ ou encore $p_1 = q_1 p_2$ c'est-à-dire lorsque $p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$.

3. D'après le raisonnement de la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(T = 2n + 1) = (q_1 q_2)^n p_1 \text{ et } P(T = 2n + 2) = (q_1 q_2)^n q_1 p_2$$

Pour calculer l'espérance de T on a affaire à des dérivées de séries géométriques convergentes, donc l'espérance existe et on peut « casser » la sommation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)P(T=2n+1) = 2p_1\sum_{n=0}^{+\infty} n(q_1q_2)^n + p_1\sum_{n=0}^{+\infty}(q_1q_2)^n$$
$$= 2p_1\frac{q_1q_2}{(1-q_1q_2)^2} + p_1\frac{1}{1-q_1q_2} = \frac{p_1(1+q_1q_2)}{(1-q_1q_2)^2}$$

De même on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)P(T=2n+2) = 2q_1p_2\frac{q_1q_2}{(1-q_1q_2)^2} + 2q_1p_2\frac{1}{1-q_1q_2} = \frac{2q_1p_2}{(1-q_1q_2)^2}.$$

Donc (après simplifications) :

$$E(T) = \frac{p_1(1+q_1q_2)}{(1-q_1q_2)^2} + \frac{2q_1p_2}{(1-q_1q_2)^2} = \frac{2-p_1}{1-q_1q_2} = \frac{q_1+q_2}{1-q_1q_2}.$$

4. On a $P(G_n) = q_1\cdots q_{n-1}p_n$ si $n>1$ et $P(G_1)=p_1$.
Aucun jeu ne peut être équitable pour une **infinité** de joueurs car chacun aurait une probabilité nulle de gagner ce qui est un cas ou le jeu n'est plus un jeu !

5. On remarque que :

$$P(G_n) = q_1\cdots q_{n-1}(1-q_n) = q_1\cdots q_{n-1} - q_1\cdots q_{n-1}q_n \quad (n\geqslant 2).$$

Donc par télescopage, pour tout $N\geqslant 1$, on a : $\sum_{n=1}^{N} P(G_n) = 1 - q_1\cdots q_N$.
Or la suite de terme général $q_1\cdots q_n$ est décroissante et positive, donc elle converge vers une limite ℓ. La probabilité que le jeu s'arrête, qui est aussi est la probabilité qu'un joueur gagne est donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = 1-\ell$$

Ainsi le jeu s'arrête au bout d'un nombre fini de coups si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} q_1\cdots q_n = 0$. Ceci est équivalent au fait que la série (à termes négatifs) de terme général $\ln(q_n)$ diverge, ce qui se produit par exemple pour $q_n = \frac{1}{2}$ (pour tout n) ; et ne se produit pas, par exemple pour $\ln(q_n) = -\frac{1}{n^2}$, soit $q_n = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n^2}}$.

Exercice 4.05.

1. Soit $g : [0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue. Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'existence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}g(x)\,dx$.

2. Calculer I_0 lorsque g est définie par

a) $g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$,

b) $g(x) = \dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$,

c) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

3. On revient au cas général. Soit M un majorant de $|g|$, c'est-à-dire un réel tel que pour tout $x \in [0,1]$, $|g(x)| \leq M$. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $J_n = n\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx} f(x)\,dx$.

Montrer que la suite $(J_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution

1. L'application $x \mapsto \mathrm{e}^{-nx} g(x)$ est définie et continue sur $[0,1]$. Elle est donc intégrable sur $[0,1]$.

2. a) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 x.\mathrm{e}^{-x} dx$. Par intégration par parties, on obtient

$I_0 = \left[x(-\mathrm{e}^{-x})\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} dx = -\mathrm{e}^{-1} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$.

b) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 f(x) f'(x)\,dx$, où $f : x \to \arctan(x)$.

$$I_0 = \left[\frac{f(x)^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{\arctan(x)^2}{2}\right]_0^1 = (\tfrac{\pi}{4})^2 \times \tfrac{1}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{32}$$

c) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.

On écrit $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, donc : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

Ainsi $I_0 = \left[\arcsin(x-1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

3. Soit $n \geqslant 1$. On a : $|I_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |\mathrm{e}^{-nx} g(x)| dx \leqslant M \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx} dx$.

Ainsi : $|I_n| \leqslant M \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} \leqslant \dfrac{M}{n}$.

Or $\dfrac{M}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, on en déduit $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Soit $J_n = n\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx} f(x) dx$. Par intégration par parties, on obtient

$$J_n = n\left[\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{-n} f(x)\right]_0^1 - n\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{-n} f'(x) dx$$

donc $J_n = -\mathrm{e}^{-n} f(1) + 1 + \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx} f'(x) dx$ (car $f(0) = 1$).

La fonction f est de classe C^1 donc f' est continue. On peut utiliser le résultat des questions précédentes avec $g = f'$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx} f'(x)dx = 0$.

De plus $\mathrm{e}^{-n} f(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 1$.

Exercice 4.06.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $u_n = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$.

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $w_n = v_n - \ln n$.

1. a) Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est décroissante

   b) Montrer que la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ est convergente.

   c) En déduire que la suite (w_n) converge. On note γ sa limite.

2. Montrer que la série de terme général u_n converge.

3. a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $n \geqslant 1$

$$u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{2n+1}$$

   b) Écrire $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de v_n et v_{2n+1}.

4. En déduire la somme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Solution

1. a) Un calcul immédiat donne :

$$w_n - w_{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{n+1}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$, il vient $w_n - w_{n+1} \geqslant 0$.

   b) On a : $w_n - w_{n+1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}$.

En effectuant un développement limité de $x \to \ln(1-x)$ au voisinage de 0, il vient :

$$w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui montre que la série $\sum(w_n - w_{n+1})$ converge.

   c) On peut écrire, pour tout $n \geqslant 2$ $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) = w_1 - w_n$

La série $\sum(w_n - w_{n+1})$ étant convergente, la suite (w_n) est convergente.

2. La série $\sum u_n$ converge puisque $u_n = \dfrac{6}{(n+1)(2n+1)} \sim \dfrac{3}{n^2}$.

3. a) Par identification, on obtient $a = -6$ et $b = 12$.

b) On écrit alors :

$$v_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2}v_n$$

Donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1$.

Par la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= -6\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + 12\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = -6\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + 12(v_{2n+1} - \frac{v_n}{2} - 1)\\ &= -6(v_n + \frac{1}{n+1} - 1) + 12(v_{2n+1} - \frac{v_n}{2} - 1)\\ &= 12(v_{2n+1} - v_n) - 6 - \frac{6}{n+1}\end{aligned}$$

4. On a $v_{2n+1} - v_n = w_{2n+1} + \ln(2n+1) - w_n - \ln n$ et par la question 1.c, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_{2n+1} - v_n = \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2$.

Finalement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 12\ln 2 - 6$.

Exercice 4.07.

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre n à coefficients réels.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle trace de A le réel

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, puis que deux matrices semblables ont même trace.

On considère dorénavant deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = I_4$.

On suppose que A et B anticommutent, c'est-à-dire que $AB = -BA$.

2. En considérant BAB, montrer que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = 0$.

3. Montrer que A et B sont diagonalisables et déterminer les dimensions de leurs sous-espaces propres respectifs.

4. On pose $C = iAB$, où $i^2 = -1$.

a) Calculer C^2 ; montrer que C et A, ainsi que C et B anticommutent.

b) Déterminer les valeurs propres de C.

Solution

1. Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, alors :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \operatorname{tr}(BA)$$

Ainsi $\operatorname{tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}\,PA) = \operatorname{tr}(A)$.

2. On a $\operatorname{tr}(BAB) = \operatorname{tr}((B(AB)) = \operatorname{tr}(ABB) = \operatorname{tr}(A)$ et
$\operatorname{tr}(BAB) = \operatorname{tr}((BA)B) = \operatorname{tr}(-ABB) = -\operatorname{tr}(A)$. Donc $\operatorname{tr}(A) = 0$.
Avec ABA, on trouvera $\operatorname{tr}(B) = 0$.

3. $A^2 = B^2 = I$, donc $\operatorname{Sp}(A) \subseteq \{-1, 1\}$, de même pour B. Puis, comme A est une symétrie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}), \exists\,(Y, Z) \in \operatorname{Ker}(A - I_4) \times \operatorname{Ker}(A + I_4) \text{ tel que } X = Y + Z$$

avec : $Y = \frac{1}{2}(X + AX)$ et $Z = \frac{1}{2}(X - AX)$, donc A est diagonalisable.
$\star$ Si $\operatorname{Ker}(A - I_4) = \{0\}$, alors $A = -I_4$ et $\operatorname{Ker}(A + I_4)$ est le seul sous-espace propre : sa dimension est 4.
$\star$ Si $\operatorname{Ker}(A+I_4) = \{0\}$, alors $A = I_4$ et $\operatorname{Ker}(A-I_4)$ est le seul sous-espace propre : sa dimension est 4.
$\star$ Si les deux noyaux sont non nuls, ce sont des sous-espaces propres. Dans la concaténation d'une base de $\operatorname{Ker}(A - I_4)$ et d'une base de $\operatorname{Ker}(A + I_4)$, la matrice de A est $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, où $\lambda_k \in \{-1, 1\}$.
D'après la première question $\sum_{k=1}^{4} \lambda_k = 0$, ce qui exige qu'il y ait deux fois la valeur propre 1 et deux fois la valeur propre -1.
Seul le troisième cas est donc possible et la dimension des sous-espaces propres de A vaut donc 2. Idem pour B.

4. a) On a $C^2 = -(AB)^2 = -A(BA)B = A(AB)B = I_4$.
Or $CA = iABA = -iA(AB) = -iB$; $AC = iA^2B = iB$, donc $AC = -CA$.
De même pour C et B.

b) On est dans le cadre de la troisième question : les valeurs propres possibles de C sont 1 ou -1 et les sous-espaces propres associés sont de dimension 2 ou 4.

Exercice 4.08.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$.

a) Pour $k \geqslant 1$, établir une relation de récurrence entre $I_{n,k}$ et $I_{n,k-1}$.

b) En déduire la valeur de $I_{n,k}$.

Dans la suite, on considère r urnes numérotées de 1 à r. Pour tout j, l'urne numéro j contient j boules rouges et $r-j$ boules blanches.
Soit n un entier naturel non nul. On effectue n tirages, avec remise après chaque tirage, dans une urne choisie au hasard une fois pour toutes.
On note X_r la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues au bout des n tirages.

2. Déterminer la loi de X_r.

3. Calculer l'espérance de X_r.

4. Déterminer pour $k \in [\![0,n]\!]$, $\lim\limits_{r\to\infty} P(X_r = k)$. En déduire que la suite $(X_r)_r$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

Solution

1. a) Pour $k \geqslant 1$:

$$I_{n,k} = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx$$
$$= \left[x^k(-1)\frac{(1-x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right]_0^1 + \frac{k}{n-k+1}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-(k-1)}\,dx$$

Donc :

$$I_{n,k} = \frac{k}{n-k+1}\,I_{n,k-1}$$

b) Comme $I_{n,0} = \dfrac{1}{n+1}$, il vient, par récurrence :

$$I_{n,k} = \frac{k}{n-k+1}\times\frac{k-1}{n-k}\times\ldots\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

La formule finale restant valide même pour $k=0$.

2. On note U_j l'événement « les tirages ont lieu dans l'urne U_j ». Par la formule des probabilités totales :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], P(X_r = k) = \sum_{j=1}^{r} P_{U_j}(X_r = k)P(U_j) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} P_{U_j}(X_r = k).$$

La loi conditionnelle de X_r sachant que U_j est réalisé est la loi $\mathcal{B}(n, j/r)$, donc :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], P(X_r = k) = \frac{1}{r}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{r}\left(\frac{j}{r}\right)^k\left(1-\frac{j}{r}\right)^{n-k}$$

3. $E(X_r) = \sum\limits_{k=0}^{n} kP(X_r = k) = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k}{r}\binom{n}{k}\sum\limits_{j=1}^{r}\left(\frac{j}{r}\right)^k\left(1-\frac{j}{r}\right)^{n-k}$, donc ;

$$= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\left(\frac{j}{r}\right)^k\left(1-\frac{j}{r}\right)^{n-k} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(n\times\frac{j}{r}\right)$$

(on a reconnu l'espérance de la loi $\mathcal{B}(n, j/r)$)

$$E(X_r) = \frac{n}{r^2} \times \frac{r(r+1)}{2} = \frac{n(r+1)}{2r}$$

4. $P(X_r = k) = \binom{n}{k} \times \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r} \left(\frac{j}{r}\right)^k \left(1 - \frac{j}{r}\right)^{n-k} \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k} I_{n,k} = \frac{1}{n+1}$

La loi de (X_r) tend vers la loi $\mathcal{U}([\![0, n]\!])$

Exercice 4.09.

1. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle. On suppose que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel ℓ.

a) Montrer que pour tout $n_0 \geqslant 2$ et pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$\left|\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} - \ell\right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0 - 1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n} |u_k - \ell|$$

b) En écrivant la définition de la convergence de (u_n) vers ℓ, montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geqslant 2 \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0, \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n} |u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \ell$.

On considère une suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \geqslant 0$

$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$$

2. a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.

c) En déduire que $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n}{2}$.

Solution

1. a) On a $\left|\dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} - \ell\right| = \left|\dfrac{u_1 + \cdots + u_n - n\ell}{n}\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k - \ell}{n}\right|$ et

$$\left|\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} - \ell\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{u_k - \ell}{n}\right| = \sum_{k=1}^{n_0 - 1} \left|\frac{u_k - \ell}{n}\right| + \sum_{k=n_0}^{n} \left|\frac{u_k - \ell}{n}\right|$$

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 2$ tel que $\forall k \geq n_0, |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

On écrit :

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k - \ell| \leqslant \frac{C_{n_0}}{n} + \varepsilon \frac{n - n_0}{n}$$

$$\leqslant \frac{C_{n_0}}{n} + \varepsilon, \text{ où } C_{n_0} \text{ ne dépend pas de } n.$$

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$: il existe n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, $0 < \dfrac{C_{n_0}}{n} \leqslant \varepsilon$.
On prend enfin $n \geqslant \max(n_0, n_1)$ pour terminer la question.

2. On écrit $u_{n+1}^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_k + u_n = u_n^2 + u_n$; donc $u_{n+1}^2 \geqslant u_n^2$ car les termes de la suite sont positifs et par suite $u_{n+1} \geq u_n$, par cette même raison. La suite (u_n) est croissante.
Si elle converge vers ℓ, alors $\ell^2 = \ell^2 + \ell$ soit $\ell = 0$: impossible car $u_n \geqslant u_0 > 0$, donc $\ell \geqslant u_0$.
Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3. Il vient $\dfrac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = 1$ et par suite $u_{n+1} \underset{(+\infty)}{\sim} u_n$.
De plus $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_{n+1}^2 - u_n^2}{u_{n+1} + u_n} = \dfrac{u_n}{u_{n+1} + u_n} = \dfrac{1}{\frac{u_{n+1}}{u_n} + 1}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$$

4. Posons $v_k = u_{k+1} - u_k$ pour $k \geqslant 0$. Alors $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k = \dfrac{1}{2}$.
D'après la question 1), $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} v_k = \dfrac{1}{2}$.
Or $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(u_{n+1} - u_0) = \frac{1}{2} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} u_{n+1} = \frac{1}{2} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}$$

car $u_{n+1} \underset{(+\infty)}{\sim} u_n$. Donc : $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{n}{2}$.

Exercice 4.10.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2. Montrer que f est continue, dérivable sur D. Donner les variations de f.
Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Montrer que :

a) $f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

b) $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$ (on pourra considérer $h(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\, dt + \ln x$).

4. On pose $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

a) Montrer que g est une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire de densité g.

b) Déterminer, s'ils existent, les moments de X.

Solution

1. Pour $t \geqslant 1, \frac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge. Ainsi, pour tout $x > 0$, $f(x)$ existe. Mais $f(0)$ n'existe pas car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est divergente car $\frac{e^{-t}}{t} \underset{(0^+)}{\sim} \frac{1}{t}$.
Conclusion $\forall x \leqslant 0$, $f(x)$ n'existe pas. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_x^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt$, donc f est continue, dérivable et $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.
La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On sait qu'elle admet des limites (finies ou infinies) en 0 et $+\infty$; la limite en $+\infty$ est nulle comme reste d'intégrale convergente. L'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ diverge, f est positive, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

3. a) Soit $z > x$ et l'intégrale $\int_x^z \frac{e^{-t}}{t} dt$. Faisons une intégration par parties en intégrant $t \mapsto e^{-t}$ en $t \mapsto -e^{-t}$:

$$\int_x^z \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^z - \int_x^z \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

et, par passage à la limite légitime : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt}_{= g(x)}$.

et si $t \geqslant x$, alors $\frac{e^{-t}}{t^2} \leqslant \frac{e^{-t}}{x^2}$, donc $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^2}$. ce qui montre que $\frac{e^{-x}}{x}$ est un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

b) On écrit $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x = \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$.
La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$ est continue sur $]0, 1]$, prolongeable par continuité en 0, donc elle admet des primitives sur $[0, 1]$: h est continue sur $[0, 1]$, donc bornée.

Ainsi

$$f(x) + \ln(x) = h(x) + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} dt = h(x) + A$$

Il en résulte que $f(x) = -\ln x + h(x) + A$.
Or $h(x)$ et A sont négligeables, au voisinage de 0^+, devant $-\ln x$, ce qui donne l'équivalent demandé.

4. a) En intégrant par parties pour a et b strictement positifs :

$$\int_a^b f(x)dx = \left[xf(x)\right]_a^b - \int_a^b xf'(x)dx = bf(b) - af(a) + \int_a^b \mathrm{e}^{-x}dx$$

Grâce aux équivalences précédentes, $\lim\limits_{a\to 0^+} af(a) = \lim\limits_{b\to+\infty} bf(b) = 0$.

De plus $\lim\limits_{a\to 0^+} \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b \mathrm{e}^{-x}dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}dx = 1$

Ainsi g est une fonction positive, continue d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$: c'est une densité de probabilité.

b) La convergence des intégrales rencontrées étant évidentes, d'après le théorème du transfert, qui s'applique, et après avoir pris les précautions habituelles pour une intégration par parties, on trouve :

$$M_n(X) = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{n+1}}{n+1} f(b) + \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} dx$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n(x)$ existe et vaut $\dfrac{n!}{n+1}$, (par récurrence simple).