4

Option B/L

Exercice 4.01.

Pour tout entier naturel n non nul, soit f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n \sin(\pi t)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) Montrer qu'il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f(\alpha_n) = \sup\limits_{t\in[0,1]} f_n(t)$.

b) Montrer que $\cos(\pi\alpha_n) \neq 0$.

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$.

On pose $\varepsilon_n = 1 - \alpha_n$.

3. a) Montrer que $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n} + o(1)$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in[0,1]} f_n(t)$.

Solution

1. a) On remarque que $f_n(0) = f_n(1) = 0$ et pour tout $t \in]0,1[$, $f_n(t) > 0$. Ainsi, la fonction f_n étant continue sur $[0,1]$, elle atteint ses bornes sur cet intervalle. De plus, la borne supérieure est atteinte à l'intérieur de l'intervalle.

b) Comme α_n est intérieur à l'intervalle $[0,1]$, $f'(\alpha_n) = 0$. Ainsi,

$$n\sin(\pi\alpha_n) + \pi\alpha_n\cos(\pi\alpha_n) = 0.$$

Si $\cos(\pi\alpha_n) = 0$, alors $\sin(\pi\alpha_n) = 0$, ce qui est impossible car $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Ainsi, $\cos(\pi\alpha_n) \neq 0$.

2. a) D'après la question précédente, $\tan(\pi\alpha_n) = -\dfrac{\pi\alpha_n}{n}$.
Comme $\alpha_n \in]0,1[$, $\big(\frac{\pi\alpha_n}{n}\big)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0. Ainsi, $\tan(\pi\alpha_n)$ converge vers 0 par valeurs négatives et la suite (α_n) converge vers 1.

b) En reprenant la question précédente, $\tan(\pi\varepsilon_n) = \frac{\pi}{n}(1-\varepsilon_n)$.
Ainsi : $\pi\varepsilon_n = \arctan\big(\frac{\pi}{n}(1-\varepsilon_n)\big)$.
Donc d'après le développement limité de arctan : $\pi\varepsilon_n = \frac{\pi}{n}(1-\varepsilon_n) + o\big(\frac{\pi}{n}(1-\varepsilon_n)\big)$
Soit $\varepsilon_n - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{\varepsilon_n}{n} + o\big(\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon_n}{n}\big) = o\big(\frac{1}{n}\big)$, car (ε_n) converge vers 0.

c) Finalement :

$$\begin{aligned}\sup_{[0,1]} f_n = f_n(\alpha_n) &= n\big(1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\big)^n \sin(\pi(1-\frac{1}{n}+o(1/n)))\\ &= n\big(1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\big)^n \sin\big(\frac{\pi}{n}+o(1/n)\big)\end{aligned}$$

et les équivalents classiques donnent : $\sup\limits_{[0,1]} f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{\mathrm{e}}$.

Exercice 4.02.

On utilise deux pièces de monnaie équilibrées. On lance la première pièce n fois de suite et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de Face obtenus. On effectue la même opération avec la deuxième pièce et on note Y la variable aléatoire donnant le nombre de Face obtenus.

Ces deux variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soient m et n deux entiers positifs et $k \in [\![0, n+m]\!]$. En développant $(1+t)^{n+m}$ de deux manières différentes, établir la formule suivante :

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

2. Quelle est la loi de X ? Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes et identiquement distribuées ?

3. Calculer la probabilité de l'événement $[X+Y=n]$.

4. Que vaut $P(X=Y)$?

5. Montrer que $P(Y \geqslant X) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\Big)$.

Solution

1. Avec la formule du binôme de Newton, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}t^k=(1+t)^{n+m}=(1+t)^n(1+t)^m$$
$$=\Big(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^k\Big)\Big(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}t^k\Big)=\sum_{k=0}^{n+m}\Big(\sum_{\ell=0}^{k}\binom{m}{\ell}\binom{m}{k-\ell}\Big)t^k$$

En identifiant les coefficients, on aboutit à la formule demandée.

2. Comme les résultats des lancers sont indépendants, il est clair que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Les variables X et Y sont clairement (*i.e.* « physiquement ») indépendantes et suivent la même loi.

3. La probabilité cherchée est celle d'obtenir n faces à l'issue des lancers des deux pièces. En utilisant l'indépendance des variables X et Y et la formule trouvée en 1., on voit que :

$$P(X+Y=n)=P\Big(\bigcup_{k=0}^{n}(X=k)\cap(Y=n-k)\Big)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$
$$=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

4. On a :

$$P(X=Y)=P\Big(\bigcup_{k=0}^{n}(X=k)\cap(Y=k)\Big)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)^2=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{k}^2$$

Comme $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$, on trouve finalement avec la formule de 1. :

$$P(X=Y)=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

5. Par symétrie, on a $P(X>Y)=P(Y>X)$. Par suite, il vient :

$$1=P(X>Y)+P(X<Y)+P(X=Y)=2P(X>Y)+P(X=Y)$$
$$=2P(X\geqslant Y)-P(X=Y)$$

Il en résulte que :

$$P(X\geqslant Y)=\frac{1}{2}\big(1+P(X=Y)\big)=\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\Big)$$

Exercice 4.03.

Soient p et q deux réels tels que $p\in\,]0,1[$ et $q=1-p$.

On considère une variable aléatoire réelle discrète X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},P)$, dont la loi de probabilité est donnée par :

$$X(\Omega)=\mathbb{N}\text{ et }\forall\,k\in\mathbb{N},P(X=k)=p\,q^k.$$

1. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

2. On définit une nouvelle variable aléatoire en posant $Y=\dfrac{1}{X+1}$.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [0,1[$. Rappeler la valeur de la somme $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} x^i$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1[, \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{t^k}{k} = -\ln(1-t) - \displaystyle\int_0^t \frac{x^{n+1}}{1-x}dx$.

c) Prouver la convergence et calculer la somme de la série $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{t^k}{k}$.

d) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

3. Soit Z une variable aléatoire réelle discrète telle que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z sachant que $(X = k)$ est réalisé est la loi uniforme sur $[\![0, k]\!]$.

a) Pour tout $n \in N$, exprimer $P(Z = n)$ sous la forme d'une somme.

b) Montrer que Z admet une espérance que l'on notera $E(Z)$.

c) Calculer $E(Z)$ (on admettra qu'il est possible de permuter l'ordre des sommations à effectuer).

Solution

1. a) La variable $X+1$ suit la loi géométrique de paramètre p. Par conséquent X admet une espérance et une variance telles que $E(X) = \dfrac{q}{p}$ et $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

2. a) On a $Y(\Omega) = \big\{\dfrac{1}{m}, m \in \mathbb{N}^*\big\}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Y = \frac{1}{m}) = P(X = m-1) = pq^{m-1}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} x^i = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Soit $t \in [0,1[$. En intégrant la formule précédente sur le segment $[0,t]$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{t^{i+1}}{i+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^k}{k} = \int_0^t \frac{dx}{1-x} - \int_0^t \frac{x^{n+1}}{1-x}dx = -\ln(1-t) - \int_0^t \frac{x^{n+1}}{1-x}dx.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 \leqslant x \leqslant t < 1$, on a :

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x} \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-x}$$

En intégrant pour x variant de 0 à t, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1[, 0 \leqslant \int_0^t \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx \leqslant \frac{t^{n+2}}{(n+2)(1-t)}$$

Par encadrement, il suit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^t \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx) = 0$.

On déduit alors de la question précédente que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{t^k}{k}$ converge avec :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} = -\ln(1-t)$$

d) La variable Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k}P(Y = \frac{1}{k})$ converge. La somme partielle de rang N de cette série s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}P(Y=\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}pq^{k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{N}\frac{q^k}{k}$$

On reconnaît la somme partielle de la série étudiée à la question précédente. Il s'ensuit que Y admet une espérance avec :

$$E(Y) = \frac{p}{q}(-\ln(1-q)) = \frac{-p\ln(p)}{1-p}$$

3. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$P_{(X=k)}(Z=n) = \frac{1}{k+1} \text{ si } n \in [\![0,k]\!] \text{ et } P_{(X=k)}(Z=n) = 0 \text{ si } n \notin [\![0,k]\!].$$

En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X=k)_{k\in\mathbb{N}}$, on trouve

$$P(Z=n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P_{(X=k)}(Z=n)P(X=k) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{pq^k}{k+1}$$

b) La variable Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum nP(Z = n)$, *i.e.* la série $\sum_n \big(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{pq^k}{k+1}\big)$ converge.

On pose $u_n = nP(Z=n)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n = n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{pq^k}{k+1} \leqslant np\sum_{k=n}^{\infty} q^k = np\frac{q^n}{1-q} = nq^n$$

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge. Il s'ensuit que Z admet une espérance.

c) On calcule alors l'espérance de Z :

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} n\frac{pq^k}{k+1}$$

Comme on a admis que l'on pouvait permuter l'ordre des sommations (sans changer la somme), il vient :

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} n\frac{pq^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{pq^k}{k+1}\frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = \frac{1}{2}E(X) = \frac{q}{2p}.$$

Exercice 4.04.

L'expérience qui suit est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires qui suivent.

Soit d un entier tel que $d \geqslant 2$ et n un entier tel que $n \geqslant 1$.
On considère deux urnes A et B initialement vides et d boules numérotées de 1 à d.
On procède à l'expérience suivante : on lance d fois un dé ordinaire. Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, si le i-ième lancer a donné un chiffre inférieur ou égal à 4, on place la boule portant le numéro i dans l'urne A ; sinon on la place dans l'urne B.

On note X_0 le nombre de boules se trouvant dans l'urne A après cette série de lancers.

On choisit alors au hasard un nombre compris entre 1 et d et on change d'urne la boule dont le numéro vient d'être obtenu et on recommence indéfiniment

On note X_n le nombre de boules contenues dans l'urne A à la fin de n échanges.

1. Déterminer la loi de X_0.

2. Calculer, pour $(i, j) \in [\![0, d]\!]^2$, la probabilité conditionnelle $P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = i)$.

3. Montrer que la suite $(E(X_n))_n$ vérifie une relation de récurrence arithmético-géométrique.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)$. Interpréter le résultat obtenu.

Solution

1. Tout d'abord $X_0(\Omega) = [\![0, d]\!]$. Réaliser $(X_0 = k)$ c'est avoir obtenu k fois un numéro inférieur ou égal à 4 et $d - k$ fois un numéro supérieur à 4. Ainsi X_0 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(d, 2/3)$.

2. Au vu de l'expérience proposée, lorsque l'urne A contient j boules, avec $1 \leqslant j \leqslant d - 1$, au moment n, elle ne peut en contenir que $j - 1$ ou $j + 1$ au moment $n + 1$. Ainsi pour $i \notin \{j - 1, j + 1\}$, $P(X_{n+1} = i/X_n = j) = 0$.

• $P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = j - 1) = \dfrac{j}{d}$, car le numéro tiré correspond à un numéro de boule contenue dans A à l'instant n.
• $P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = j + 1) = \dfrac{d - j}{d}$.
• Tandis que $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1$, $P_{(X_n=n)}(X_{n+1} = n - 1) = 1$

3. En utilisant le système complet d'événements $(X_n = j)_{0\leq j\leq d}$, il vient :

$$P(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{d} P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = i)P(X_n = j)$$

• $P(X_{n+1} = 0) = P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 1) = \dfrac{1}{d}P(X_n = 1)$.

• $P(X_{n+1}=d)=P_{(X_n=d-1)}(X_{n+1}=d)P(X_n=d-1)=\frac{1}{d}P(X_n=d-1)$.

• Sinon la formule générale se réduit aux deux termes :

$$P(X_{n+1}=i)=\frac{i+1}{d}P(X_n=i+1)+\frac{d-i+1}{d}P(X_n=i-1)$$

Comme $P(X_n=k)$ est nul si $k\notin[\![0,d]\!]$, la formule précédente est en fait valable pour toutes valeurs de n et i et on peut donc écrire directement sans se préoccuper des limites des sommations :

$$\begin{aligned}E(X_{n+1})&=\sum_{i=0}^{d}iP(X_{n+1}=i)=\sum_i iP(X_{n+1}=i)\\&=\sum_i i\times\frac{i+1}{d}P(X_n=i+1)+\sum_i i\times\frac{d-i+1}{d}P(X_n=i-1)\\&=\sum_j(j-1)\times\frac{j}{d}P(X_n=j)+\sum_j(j+1)\times\frac{d-j}{d}P(X_n=j)\\&=\sum_j\frac{j^2-j+dj-j^2+d-j}{d}P(X_n=j)\\&=\frac{d-2}{d}\sum_j jP(X_n=j)+\sum_j P(X_n=j)\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$E(X_{n+1})=\frac{d-2}{d}E(X_n)+1$$

5. Le point fixe de cette récurrence arithmético-géométrique est $\frac{d}{2}$, et on obtient :

$$E(X_n)-\frac{d}{2}=\left(1-\frac{2}{d}\right)^n\left(E(X_0)-\frac{d}{2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

car $d>2$ et $0<1-\dfrac{2}{d}<1$.

Après de nombreuses manipulations les contenus des urnes auront tendance à s'équilibrer...

Exercice 4.05.

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E_n le sous-espace vectoriel des polynômes de E de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel.

Soit Φ l'application de E dans E qui à P associe $P(X+1)-P(X)$, et Δ l'endomorphisme défini sur E qui à P associe le polynôme dérivé P'.

1. Montrer que E_n est stable par Φ et par Δ et que Φ et Δ restreintes à E_n induisent des endomorphismes de E_n notés respectivement Φ_n et Δ_n.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$, $\mathrm{Ker}(\Phi_n)$, $\mathrm{Im}(\Delta_n)$, $\mathrm{Im}(\Phi_n)$. On précisera pour chaque espace sa dimension et une base.

3. Écrire les matrices F [respectivement M] des endomorphismes Φ_n [respectivement Δ_n] dans la base canonique de E_n.

4. Montrer que $\mathcal{A} = (\Delta_n^k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ est une famille libre d'endomorphismes de E_n.

5. Montrer que Φ_n appartient à $\mathrm{Vect}(\mathcal{A})$.

Solution

1. La linéarité de Φ se traite aisément, celle de Δ vient du cours.

La stabilité de E_n par Δ vient de ce que le degré d'un polynôme dérivé est inférieur à celui du polynôme initial, et par Φ du fait que, en dehors du cas d'un polynôme constant qui appartient clairement au noyau de Φ, pour tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1, le terme de plus haut degré disparaît dans la différence (binôme de Newton) et donc le degré est au plus $\deg(P) - 1 \leqslant n - 1$.

Comme la restriction à un sous espace vectoriel E' de E d'une application linéaire f de E dans un (autre) espace vectoriel F est une application linéaire de E' dans F de noyau $\mathrm{Ker}(f|_{E'}) = \mathrm{Ker}(f) \cap E'$, on obtient ainsi le fait que Φ_n et Δ_n sont deux endomorphismes de E_n.

2. $\mathrm{Ker}(D_n) = \mathrm{Ker}(D) \cap E_n$ est formé des polynômes constants.
Ainsi $\mathrm{Ker}(D_n) = \mathbb{K}_0[X]$, de dimension 1, de base (1).

Le théorème du rang nous donne alors $\dim(\mathrm{Im}(D_n)) = n + 1 - 1 = n$. Toutes les images des vecteurs de E_n sont dans $\mathbb{K}_{n-1}[X] = E_{n-1}$, donc on a l'inclusion $\mathrm{Im}(D_n) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X] = E_{n-1}$ et comme les deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension finie, ils sont égaux. Bilan : $\mathrm{Im}(D_n) = E_{n-1}$, de dimension n, de base : $(1, X, \dots, X^{n-1})$.

De même les polynômes de $\mathrm{Ker}(\Phi_n)$ sont les polynômes de E_n tels que l'on ait : $\forall\, x \in \mathbb{K}, P(x+1) = P(x)$.
P est donc un polynôme périodique de période 1.

Par conséquent un tel polynôme P est tel que $P(X) - P(0)$ est nul en tout point de $\mathbb{N}$, donc est le polynôme nul, ce qui prouve que P est constant.
Bilan : $\mathrm{Ker}(\Phi_n) = \mathbb{K}_0[X]$, de dimension 1, de base (1).

En raisonnant exactement comme pour D_n, puisque le degré de $\Phi_n(P)$ reste inférieur ou égal à $n - 1$, on obtient :
$\mathrm{Im}(\Phi_n) = E_{n-1}$, de dimension n, de base : $(1, X, \dots, X^{n-1})$

3. Il suffit d'écrire en colonnes les transformés des vecteurs de base pour obtenir :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} ; F = \begin{pmatrix} 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & 0 & \binom{2}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k D_n^k = 0$.

Appliqué au polynôme X^n, il vient $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k (X^n)^{(k)} = 0$. Or la famille $(X^n)^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$ est graduée en degrés donc libre et tous les scalaires λ_k sont nuls. La famille donnée est donc bien libre dans $\mathcal{L}(E_n)$.

5. La formule de Taylor des polynômes s'écrit :

$$\forall\, P \in E_n, \forall\, a, b \in \mathbb{K}, P(a+b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a) b^k}{k!}$$

Ou encore en remplaçant a par X :

$$\forall\, P \in E_n, P(X+b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta_n^k(P)(X) b^k}{k!}$$

d'où en appliquant cette formule deux fois, pour $b = 1$ et $b = 0$, et en effectuant la différence :

$$\forall\, P \in E_n, P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta_n^k(P)(X)(1^k - 0^k)}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_n^k(P)(X)}{k!}$$

Donc : $\Phi_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\Delta_n^k}{k!}$ et Φ_n est bien une combinaison linéaire des éléments de la famille $\mathcal{A}$.

Exercice 4.06.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. À tout f de E, on associe l'application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\, dt.$$

a) Montrer que F est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout réel x.

b) Dans cette question uniquement, on a $f : x \mapsto \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Déterminer F.

2. Soit $T : E \to E$ définie par $T(f) = F$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) L'endomorphisme T est-il injectif ? surjectif ?

3. a) Déterminer le noyau de T.

b) Montrer que pour tout a de $\mathbb{R}$, la fonction $f_a : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ vérifie $T(f_a) = \lambda_a f_a$, où λ_a est un réel à déterminer.

c) Montrer que pour α réel strictement positif, il existe a tel que $\alpha = \lambda_a$.

Solution

1. a) La fonction f est supposée continue sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives. Soit ϕ l'une d'entre elles. Pour tout x, on a : $F(x) = \phi(x+1) - \phi(x)$. Ainsi, F est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout x, $F'(x) = f(x+1) - f(x)$.

b) Il convient de distinguer trois cas selon la position de 1 par rapport aux deux bornes d'intégration x et $x+1$. On obtient :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}\right) & \text{si } x \geqslant 1 \\ \frac{(1-x)^2}{2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1-2x}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. a) L'application T est linéaire par linéarité de l'intégration et pour tout f de E, $T(f) = F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc *a fortiori* continue. Donc T est un endomorphisme de E.

b) $\star$ Soit $f : x \mapsto \sin 2\pi x$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \sin 2\pi t dt = 0$. Donc $T(f) = 0$ mais $f \neq 0$. Donc T n'est pas injectif.

$\star$ Soit $g : x \mapsto |x|$. La fonction g est dans E, mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ car pas dérivable en 0. Or pour tout f de E, $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc g n'a pas d'antécédent par T, qui n'est donc pas surjectif.

3. a) $\star$ Soit $f \in \operatorname{Ker} T$, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\, dt = 0$. En dérivant, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$ et f est périodique, 1 étant période de f.

$\star$ Réciproquement, si f est périodique, 1 étant période de f, alors F' est la fonction nulle et F est constante. Par conséquent F est la fonction nulle si et seulement si $F(0) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = 0$.

Le noyau de T est formé des fonctions dont 1 est période et d'intégrale nulle sur $[0,1]$ (ou sur tout autre segment de longueur 1).

b) $\star$ Si $a \neq 0, T(f_a)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{at}\, dt = \frac{\mathrm{e}^a - 1}{a} \times \mathrm{e}^{ax}$. Donc

$$T(f_a) = \frac{\mathrm{e}^a - 1}{a} f_a \text{ avec } f_a \neq 0.$$

Ceci prouve que f_a est vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda(a) = \dfrac{\mathrm{e}^a - 1}{a}$.

$\star$ D'autre part : $T(f_0)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} 1 dt = 1$. Donc $T(f_0) = f_0$ et f_0 est vecteur propre de T associé à la valeur propre 1.

c) On considère λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\lambda(a) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^a - 1}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$

La fonction λ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $\lambda(a) \underset{a \to 0}{\longrightarrow} 1 = \lambda(0)$).

On a $\lim\limits_{a \to -\infty} \lambda(a) = 0$ et $\lim\limits_{a \to +\infty} \lambda(a) = +\infty$, donc la fonction continue λ atteint toutes les valeurs de $\mathbb{R}_+^*$, ce que l'on voulait démontrer.

(notons que $\mathrm{e}^a - 1$ est du signe de a, et donc la fonction λ ne prend aucune valeur strictement négative), ainsi $\lambda_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.07.

1. Déterminer les valeurs de x réel pour lesquelles $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^t - 1}\, dt$ converge.

On note alors $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^t - 1} dt$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

On admet que la fonction f est continue sur son domaine de définition D.

3. a) Montrer que pour tout $x \in D, f(x) - f(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

b) En déduire un équivalent de f au voisinage de $\inf D$.

4. a) Montrer que pour tout $x \in D, f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+n)^2}$.

b) En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

<u>**Solution**</u>

1. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^t - 1} dt$ est positive sur $\mathbb{R}^+$.

• pour t au voisinage de 0, $\varphi(t) \sim \dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1} \sim 1$. L'intégrale est faussement impropre en 0.

• pour t au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) \sim t\,\mathrm{e}^{-(x+1)t}$ dont l'intégrale au voisinage de l'infini converge si et seulement si $x > -1$.

Le domaine de définition de f est donc $D =]-1, +\infty[$.

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$ et on note M un majorant de cette fonction positive. Ainsi :

$$|f(x)| \leqslant M \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} dt = \frac{M}{x} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

3. a) on a :

$$f(x) - f(x+1) = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^t - 1} dt - \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-(x+1)t}}{\mathrm{e}^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-(x+1)t}\, dt$$

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

b) Lorsque x tend vers -1, $x+1$ tend vers 0 et $f(x+1)$ vers $f(0)$ (continuité de f admise). Ainsi au voisinage de -1, $f(x) \sim \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

4. a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} (f(x+k) - f(x+k+1)) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(x+k+1)^2} = f(x) - f(x+N)$$

En utilisant la question précédente, en faisant tendre N vers $+\infty$, il vient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} = f(x)$$

b) Soit $x \in D$ fixé. On utilise la méthode de comparaison série/intégrale pour la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(x+t)^2}$ pour obtenir :

$$f(x) - \frac{1}{x^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t)^2} = \frac{1}{x} \leqslant f(x) + \frac{1}{x^2}$$

ce qui montre que $f(x) \sim \dfrac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4.08.

On admet que les propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes restent valides pour des variables à densité.

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. On note $Y = \cos X$ et $Z = \sin X$.

1. Calculer l'espérance de Y et celle de Z.

2. Montrer que la covariance de Y et Z est nulle.

3. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

4. a) Soit h la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $h(x) = \cos x$. Montrer que h est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$ et établir que $\sin(h^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

b) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, déterminer une densité de Y et retrouver la valeur de $E(Y)$.

Solution

1. Par le théorème de transfert :

$$E(Y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(t)\,dt = 0\,;\; E(Z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\sin(t)\,dt = 0$$

2. On a $YZ = \cos X \sin X = \frac{1}{2}\sin(2X)$. D'où : $E(YZ) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi}\sin(2t)\,dt =$ 0, par conséquent :

$$\mathrm{Cov}(Y,Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z) = 0$$

3. Si Y et Z étaient indépendantes, Y^2 et Z^2 le seraient également, or $Y^2 + Z^2 = 1$.

4. a) La fonction h coïncide avec la fonction cosinus sur $[0,\pi]$; elle est continue et réalise une bijection décroissante de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
Comme $\sin^2(h^{-1}(x)) + \cos^2(h^{-1}(x)) = 1$, on a $\sin^2(h^{-1}(x)) = 1 - x^2$.
De plus $\sin(h^{-1}(x)) \geqslant 0$, puisque x appartient à $[0,\pi]$, on trouve donc :

$$\sin(h^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

b) On a $Y(\Omega) = [-1,1]$ et pour tout $x \in [-1,1]$

$$F_Y(x) = P(\cos(X) \leqslant x) = P(z \leqslant X \leqslant 2\pi - z) = F_X(2\pi - z) - F_X(z)$$

avec $z \in [0,\pi]$ tel que $\cos z = x$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \frac{2\pi - z}{2\pi} - \frac{z}{2\pi} = 1 - \frac{z}{\pi} = 1 - \frac{h^{-1}(x)}{\pi}$$

La fonction h^{-1} est dérivable, avec $(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(x))} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

La fonction F_Y est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in\,]-1,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ sont convergentes (règle de Riemann au voisinage de ± 1) et par imparité :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

Exercice 4.09.

Pour tout $x > 0$, on pose $h_x(t) = \dfrac{\ln t}{t^x}$.

1. Étudier les variations de h_x après avoir donné son domaine de définition.

2. Déterminer H_x, la primitive de h_x qui s'annule en 1.

On pose $F(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} h_x(n) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^x}$, *pour tout* x, *tel que la série considérée soit convergente.*

3. a) Montrer que la série précédente est convergente pour $x > 1$ et divergente pour $x < 1$.

b) Étudier la convergence de la série précédente pour $x = 1$. (On pourra procéder à une comparaison série/intégrale).

4. Montrer que F est décroissante sur $]1, +\infty[$.

5. a) Montrer que, pour tout $x > 1$, $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} dt$ converge et calculer sa valeur que l'on note $I(x)$.

b) Montrer que $I(x) \underset{(1^+)}{\sim} \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

c) Montrer que pour tout $x > 1$, $\dfrac{\ln 2}{2^x} + I(x) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\ln 2}{2^x} + \dfrac{\ln 3}{3^x} + I(x)$.

d) En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Solution

1. La fonction h_x est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $h'_x(t) = \dfrac{1 - x\ln t}{t^{x+1}}$.

2. La fonction h_x étant continue, on a $H_x(t) = \displaystyle\int_1^t h_x(u)\,du = \int_1^t \frac{\ln u}{u^x}\,du$

$\to H_1(t) = \frac{1}{2}(\ln t)^2$

$\to$ Pour $x \neq 1$, en intégrant par parties :

$$H_x(t) = \frac{\ln t}{(1-x)t^{x-1}} - \frac{1}{(1-x)^2}\Big(\frac{1}{t^{x-1}} - 1\Big)$$

3. a) $\star$ Si $x > 1$. Pour $\alpha \in\,]1, x[$:

$$n^\alpha \frac{\ln n}{n^x} = \frac{\ln n}{n^{x-\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(Par croissances comparées).

Par la règle de Riemann, la série de terme général $h_x(n)$ converge.

⋆ Si $x < 1$, pour $n \geqslant 3$, $u_n(x) > \dfrac{1}{n}$ et la série de terme général $h_x(n)$ diverge.

b) La fonction $h_1 : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est décroissante positive sur $[3, +\infty[$, on en déduit :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \geqslant \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x}\, dx = \big[\ln(\ln x)\big]_3^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 3)$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{\ln k}{k} = +\infty$ et la série de terme général $h_1(n)$ diverge.

4. Soient x, y dans $]1, +\infty[$ tels que $x < y$ et $n \geqslant 2$:
$\forall\, k \in [\![2, n]\!], k^x < k^y \implies \dfrac{1}{k^y} < \dfrac{1}{k^x} \implies \dfrac{\ln k}{k^y} < \dfrac{\ln k}{k^x}$, et donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k^y} < \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k^x}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient : $F(y) \leqslant F(x)$. Donc F est décroissante sur $]1, +\infty[$.

5. a) La fonction h_x est continue positive sur $[3, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[3, +\infty[$. Soit $x > 1$ et $\alpha \in]1, x[$. On a $t^\alpha \dfrac{\ln t}{t^x} = \dfrac{\ln t}{t^{x-\alpha}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $\dfrac{\ln t}{t^x} = o(\dfrac{1}{t^\alpha})$ et, par le règle de Riemann $I(x)$ converge.
Soit $A \geqslant 3$. Il vient, en effectuant une intégration par parties :

$$\int_3^A \frac{\ln t}{t^x} dt = \left[\frac{\ln t}{(1-x)t^{x-1}} - \frac{1}{(1-x)^2 t^{x-1}}\right]_3^A$$

Puis en faisant tendre A vers $+\infty$, on a :

$$I(x) = \frac{\ln 3}{(x-1)3^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 3^{x-1}}$$

b) $\forall\, x > 1, I(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}[(x-1)\dfrac{\ln 3}{3^{x-1}} + \dfrac{1}{3^{x-1}}]$.

On fait tendre x vers 1 par valeurs supérieures, on obtient alors :

$$I(x) \underset{(x\to 1^+)}{\sim} \frac{1}{(x-1)^2}$$

c) Soit $x > 1, h_x$ est strictement décroissante et positive sur $[3, +\infty[$.
Soit $N \geqslant 4$, par comparaison :

$$\int_3^{N+1} \frac{\ln(t)}{t^x} dx \leqslant \sum_{n=3}^{N} \frac{\ln(n)}{n^x} \leqslant \frac{\ln 3}{3^x} + \int_3^N \frac{\ln(t)}{t^x} dx$$

On fait tendre N vers $+\infty$ et on a $I(x) \leqslant \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^x} \leqslant \dfrac{\ln 3}{3^x} + I(x)$.

D'où :

$$\frac{\ln 2}{2^x} + I(x) \leqslant F(x) \leqslant \frac{\ln 2}{2^x} + \frac{\ln 3}{3^x} + I(x)$$

En multipliant les membres de l'inégalité précédente par $(x-1)^2$, pour $x > 1$, et en faisant tendre x vers 1^+, on obtient :

$$F(x) \underset{(x\to 1^+)}{\sim} \frac{1}{(x-1)^2}$$

Exercice 4.10.

Une pièce donne Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$. On effectue une suite de lancers de cette pièce. On suppose que les résultats des lancers successifs sont indépendants. On s'intéresse dans cet exercice à la première apparition de deux Pile consécutifs.

On suppose l'expérience modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout entier naturel $n > 0$, on note A_n l'événement : « deux piles consécutifs sont obtenus pour la première fois aux lancers numéros n et $n+1$ » et on note $a_n = P(A_n)$.

1. Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = x^2 - qx - pq$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines réelles distinctes r_1, r_2 telles que $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$.

2. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = qu_{n+1} + pqu_n$.

a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2. (On pourra considérer l'application qui associe à un élément de E le couple de ses deux premiers termes).

b) En déduire que $E = \text{Vect}\{(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$.

3. a) Calculer a_1 et a_2.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1,\ a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0$.

c) En déduire l'expression de a_n en fonction de r_1 et r_2 pour tout $n \geqslant 1$.

d) Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers l'infini.

4. Soit les matrices : $A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$

a) Que vaut AX_n ?

b) Montrer l'existence d'une matrice D diagonale et d'une matrice Q inversible telles que : $D = Q^{-1}AQ$.

c) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices Q, Q^{-1}, D, X_1 et retrouver l'expression de a_n de la question 3.c.

5. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Quelle est la signification du résultat ?

Solution

1. La fonction f admet un minimum en $\frac{q}{2}$: $f(\frac{q}{2}) = -q(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}p) < 0$. De plus $f(1) = p^2 > 0$, $f(-1) = 1 + q^2 > 0$. Le tableau de variations assure l'unicité d'une solution dans $]-1, \frac{p}{2}[$ et d'une solution dans $]\frac{p}{2}, 1[$. La somme est positive et le produit négatif, il y a donc une racine négative r_1 et une racine positive r_2, avec $|r_1| < |r_2|$.

2. E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, E)$ et $\mathrm{Ker}(\phi) = \{(0)_{n\in\mathbb{N}}\}$.
Par le théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^2) = 0 + \dim(E) \Rightarrow \dim(E) = 2$.
$(r_1^n)_n$ et $(r_2^n)_n$ sont deux vecteurs non colinéaires de E, donc $E = \mathrm{Vect}\{(r_1^n), (r_2^n)\}$.

3. a) On a $a_1 = p^2$ et $a_2 = qp^2$.
b) Pour tout $n \geqslant 3$, A_{n+2} est réalisé si et seulement si
→ on a obtenu face au premier tirage, et à partir de ce moment, A_{n+1} est réalisé ;
→ ou bien on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième tirage, et à partir de ce moment, A_n est réalisé.
Par indépendance des résultats des lancers effectués :

$$a_{n+2} = qa_{n+1} + pqa_n$$

c) Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \geqslant 1 : a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$. Alors :

$$\begin{cases} \alpha r_1 + \beta r_2 = p^2 \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 = qp^2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \alpha = \dfrac{-p^2}{r_2 - r_1} \\ \beta = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

Et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^n - r_1^n)$.

d) On a $0 < |r_1| < |r_2|$ et $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} r_2^n big(1 - \dfrac{r_1^n}{r_2^n}) \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} r_2^n$.

4. a) On a $AX_n = X_{n+1}$
b) Il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ si et seulement si $f(\lambda) = 0$, donc les valeurs propres sont r_1 et r_2.

On a $E_{(r_1)} = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $E_{(r_2)} = \mathrm{Vect}(u_2)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

La matrice A est diagonalisable et on a : $D = P^{-1}AP$ avec

$$P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$$

c) Par récurrence on montre : $X_n = A^{n-1}X_1$ et $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$, d'où :

$X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1$ et :

$$\begin{pmatrix} a_n+1 \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{r_2-r_1}\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1^{n-1} & 0 \\ 0 & r_2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

En développant la seconde ligne, il vient : $a_n = \dfrac{p^2}{r_2-r_1}(r_2^n - r_1^n)$.

5. On a $P(T = n+1) = a_n = \dfrac{p^2}{r_2-r_1}(r_2^n - r_1^n)$.

Comme $0 < |r_1|, |r_2| < 1$, les séries géométriques $\sum r_1^n$ et $\sum r_2^n$ convergent et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{p^2}{r_2-r_1}(1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} r_2^n - 1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} r_1^n) = \dfrac{p^2}{r_2-r_1}\big(\dfrac{1}{1-r_2} - \dfrac{1}{1-r_1}\big)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$$

Il est donc quasi-certain d'obtenir au moins une fois deux « pile » consécutifs.

Exercice 4.11.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension n ($n \geqslant 2$).

Pour tout endomorphisme f de E, on pose $f^0 = Id$, et pour tout entier $j \geqslant 1$: $f^j = f^{j-1} \circ f$.

On suppose que f n'est pas bijectif et on considère un entier naturel k quelconque.

1. a) Vérifier que : $\operatorname{Ker} f^k \subseteq \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et $\operatorname{Im} f^{k+1} \subseteq \operatorname{Im} f^k$.

b) On pose $a_k = \dim(\operatorname{Ker} f^k)$. Montrer que la suite (a_k) est croissante.

2) a) Montrer qu'il existe un entier naturel p, supérieur ou égal à 1, tel que :

$$\forall\, k \in [\![0, p-1]\!], a_k < a_{k+1} \quad \text{et } a_p = a_{p+1}$$

b) En déduire que $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$.

3. a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à p : $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$.

b) En déduire l'égalité $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.

Solution

1. a) Soit x élément de $\operatorname{Ker} f^k$. Alors $f^k(x) = 0$ entraîne $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = 0$.

De même si $x \in \operatorname{Im} f^{k+1}$, il existe $y \in E$ tel que $x = f^{k+1}(y) = f^k(f(x))$.

b) En passant aux dimensions dans la relation $\operatorname{Ker} f^k \subseteq \operatorname{Ker} f^{k+1}$, on obtient $a_k \leqslant a_{k+1}$.

2. a) La suite (a_k) est formée d'entiers naturels et elle est croissante majorée par $n = \dim E$. Elle est donc stationnaire à partir d'un moment (car elle admet une limite et une suite d'entiers admettant une limite ne peut être que constante à partir d'un moment).

b) Ceci prouve qu'il existe un entier naturel p, supérieur ou égal à 1, tel que $a_p = a_{p+1}$ et par inclusion $\operatorname{Ker} f_p = \operatorname{Ker} f_{p+1}$.

3. a) Raisonnons par récurrence sur k.

• La propriété est acquise pour $k = p$.

• Si l'on suppose, pour un certain entier naturel k supérieur ou égal à p que l'on a : $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$, alors on a :

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} f^{k+1} &\implies f^k(f(x)) = 0 \implies f(x) \in \operatorname{Ker} f^k \implies f(x) \in \ker f^p \\ &\implies f^{p+1}(x) = 0 \implies x \in \operatorname{Ker} f^{p+1} \implies x \in \operatorname{Ker} f^p. \end{aligned}$$

On conclut par le principe de récurrence.

b) Soit x élément de $\operatorname{Ker} f^p \cap \operatorname{Im} f^p$. Alors $f^p(x) = 0$ et $x = f^p(y)$. Donc $f^{2p}(y) = 0$ et $x = f^p(y) = 0$ et $x = 0$.

On conclut par le théorème du rang.

Exercice 4.12.

1. Soit N une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = P(N = n)$.

Soit X une variable aléatoire définie sur le même espace et telle que, pour tout $n \in N(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

a) Déterminer la loi de X.

b) Déterminer la loi de $N - X$.

2. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n = \dfrac{2}{(n+2)(n+3)}$.

a) Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$$

b) Déterminer la loi de X.

c) Les variables X et $Y = 1/(X+3)$ admettent-elles une espérance ? La calculer le cas échéant.

3. Dans un casino, une machine propose le jeu suivant : dans un premier temps, la machine tire au hasard, avec remise, une carte dans un jeu comportant une proportion $1 - q = p \in \,]0, 1[$ d'As. On suppose les tirages indépendants. La machine (qui mémorise les cartes tirées) s'arrête à la première apparition d'un As.

Ensuite, la machine ajoute aux cartes déjà tirées un joker, puis choisit au hasard une carte parmi celles-ci. Si elle tire le joker, on ne gagne rien. Sinon, on gagne une somme S égale au rang de sortie de la carte tirée (par exemple, si les tirages ont été successivement 3 ♡, 9 ♠, R ♣, A ♡ et que le résultat du jeu est R ♣ (3-ième carte tirée), on gagne 3 Euros.)

Quel est le prix minimum de la partie pour que le casino espère gagner de l'argent ? Que vaut ce prix pour un jeu classique de 52 cartes comportant quatre As ?

Solution

1. a) On a $\forall\,(k,n)\in\mathbb{N}^2$:

$$P((X=k)\cap(N=n))=\begin{cases} P_{(N=n)}(X=k)\,P(N=n)=\dfrac{p_n}{n+1} & \text{si } k\leq n\\ 0 & \text{si } k>n\end{cases}$$

d'où, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{\infty}P_{(N=n)}(X=k)\,P(N=n)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{p_n}{n+1}$$

b) $N-X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour $k\in\mathbb{N}$:

$$P(N-X=k)=\sum_{n=1}^{\infty}P((N=n)\cap(X=n-k))=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{p_n}{n+1}=P(X=k)$$

Ainsi $N-X$ suit la même loi que X.

2. a) Par identification : $\dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}$

b) D'où, pour $k\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=k}^{m}\frac{p_n}{n+1}=\sum_{n=k+1}^{m+1}\frac{1}{n}-2\sum_{n=k+2}^{m+2}\frac{1}{n}+\sum_{n=k+3}^{m+3}\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}-\frac{2}{k+2}-\frac{2}{m+2}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}.$$

En passant la limite :

$$P(X=k)=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

• On a : $kP(X=k)\underset{(\infty)}{\sim}\dfrac{1}{k}$, donc X n'admet pas d'espérance.

• Par le théorème de transfert et le calcul ci-dessus :

$$E\big(\frac{1}{X+3}\big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3}\,P(X=n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{4}$$

3. Le casino, qui table sur un très grand nombre de parties, raisonne en moyenne : il est gagnant si et seulement si l'espérance du gain du joueur (en tenant compte de la mise) est strictement négative. Le nombre de cartes tirées est une variable aléatoire N, qui représente le temps d'attente du premier succès dans un schéma de Bernoulli de probabilité de succès p (probabilité de tirer un As), donc $N\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$ et $\forall\,n\in\mathbb{N}^*\ p_n=pq^{n-1}$.

La machine tire ensuite au hasard une carte parmi les N tirées précédemment, qu'on peut numéroter de 1 à N selon leur rang de sortie, et le joker, auquel on peut attribuer le numéro 0. Le gain est alors toujours égal au rang de la carte tirée, qui est une variable aléatoire X dont la loi conditionnelle à la réalisation de $(N = n)$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

On est dans la situation de la question 1. Comme X et $N - X$ suivent la même loi, elles ont même espérance, et par linéarité de l'espérance :

$$2E(X) = E(X) + E(N - X) = E(N) \implies E(X) = \frac{E(N)}{2} = \frac{1}{2p}$$

Si la mise (le prix d'une partie) est M, l'espérance du gain du joueur est alors $E(X) - M$, donc le casino gagne de l'argent si et seulement si $E(X) - M < 0$, *i.e.* $M > \dfrac{1}{2p}$.

Pour 4 As parmi 52 cartes, on a $p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$ et $M > \dfrac{13}{2} = 6{,}50$ (euros).