# 4

# Option B/L

---

**Exercice 4.01.**

Soit $p$ un nombre réel tel que $0 < p < \frac{1}{2}$.

Sur la planète $\Omega$, les individus ne peuvent avoir que $0, 1$ ou $2$ enfants, avec les probabilités respectives $1 - 2p, p$ et $p$ et ceci indépendamment les uns des autres.

On considère un individu $\lambda$ et on veut étudier en fonction de $p$ la probabilité d'extinction de sa lignée.

On note $X_1$ le nombre aléatoire d'enfants de $\lambda$, $X_2$ le nombre aléatoire de ses petits-enfants et, plus généralement pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $X_n$ le nombre aléatoire de ses descendants à la $n^{\text{ème}}$ génération.

1. Soit $f$ la fonction définie sur $[0,1]$ par la relation : $f(x) = px^2 + px + (1-2p)$.

On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrer que la suite $u$ est convergente. Déterminer sa limite en fonction de la valeur de $p$.

2. a) Déterminer la probabilité de l'événement $(X_1 = 0)$.

b) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $P(X_n = 0)$.

c) Déterminer, en fonction de $p$, la probabilité d'extinction de la lignée de $\lambda$. Interprétation ?

---

**Solution**

1. On a $f'(x) = p(2x+1)$, donc $f$ est strictement croissante sur $[0,1]$ d'image $[1-2p, 1]$ contenue dans $[0,1]$

Ceci prouve que la suite $(u_n)$ est bien définie, à valeurs dans $[0,1]$.

La croissance de $f$ montre que $(u_n)$ est monotone et

$$u_1 = f(u_0) = f(0) = 1 - 2p > 0,$$

donc la suite $u$ est croissante.

Croissante et majorée cette suite converge et sa limite $\ell$ est un point fixe de $f$.

$f(\ell) = \ell \iff p\ell^2 + p\ell + 1 - 2p = \ell \iff p(\ell - 1)(\ell + \dfrac{2p-1}{p}) = 0 \iff \ell = 1$ ou $\ell = \dfrac{1-2p}{p}$.

⋆ Si $0 < p \leqslant \dfrac{1}{3}$, alors $\dfrac{1-2p}{p} = -2 + \dfrac{1}{p} \geqslant 1$ et la suite $u$ converge vers 1 qui est la seule limite acceptable.

⋆ Si $\dfrac{1}{3} < p < \dfrac{1}{2}$, alors $\ell_1 = \dfrac{1-2p}{p} \in \, ]0,1[$ et il faut faire attention…

Comme $u_0 = 0 < \ell_1$, on a $u_1 = f(u_0) < f(\ell_1) = \ell_1$, …et par récurrence la suite $u$ est croissante et majorée par $\ell_1$, ce qui prouve qu'elle converge vers $\ell_1$.

2. a) $P(X_1 = 0) = 1 - 2p$.

b) Par la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_{n+1} = 0) + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_{n+1} = 0)$$

→ Si on réalise $(X_1 = 1)$, alors on prend un nouveau départ avec un enfant unique et la descendance à la génération $(n+1)$ de $\lambda$ est de cardinal 0 si et seulement si la descendance à la génération $n$ de son fils est de cardinal 0. Soit : $P_{(X_1=1)}(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)$.

→ Si on réalise $(X_1 = 2)$, alors on prend un nouveau départ avec deux enfants et la descendance à la génération $(n+1)$ de $\lambda$ est de cardinal 0 si et seulement si la descendance à la génération $n$ de chacun de ses fils est de cardinal 0. Soit par décalage et indépendance : $P_{(X_1=2)}(X_{n+1} = 0) = [P(X_n = 0)]^2$.

c) Ainsi $P(X_{n+1} = 0) = (1-2p) + pP(X_n = 0) + pP(X_n = 0)^2$

Ainsi, en posant $p_n = P(X_n = 0)$, on a $p_1 = 1 - 2p$, et $\forall\, n \geqslant 1, p_{n+1} = f(p_n)$.

Par conséquent $p_n = u_n$ et :

→ Si $0 < p \leqslant \dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = 0) = 1$ : il est quasi-certain que la lignée de $\lambda$ s'éteindra un jour ou l'autre.

$\rightarrow$ Si $\dfrac{1}{3} < p$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \dfrac{1-2p}{p} < 1$ : il se peut que la lignée s'éteigne mais ce n'est pas sûr !

(On peut remarquer que l'espérance du nombre d'enfants d'un individu quelconque est $3p$, on peut donc interpréter le phénomène en termes de position par rapport à 1 de l'espérance du nombre d'enfants de chaque individu. . . )

---

**Exercice 4.02.**

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. **a)** Donner la loi de $U_n = \dfrac{S_n}{n}$.

**b)** Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} P\big(\big|\dfrac{S_n}{n}\big| > \delta\big)$.

2. **a)** Montrer que pour $\delta > 0$, $P\big(\big|\dfrac{S_n}{n}\big| > \delta\big) = \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}\displaystyle\int_\delta^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2} dt$.

**b)** Montrer que pour $\delta > 0$ :

$$P\big(\big|\frac{S_n}{n}\big| > \delta\big) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\,\mathrm{e}^{-n\delta^2/2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/(2n)}\mathrm{e}^{-u\delta}\,du.$$

**c)** Déterminer la limite : $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u\delta}\,du - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/(2n)}\mathrm{e}^{-u\delta} du\Big)$.

**d)** En déduire un équivalent de $P\big(\big|\dfrac{S_n}{n}\big| > \delta\big)$, lorsque $n$ tend vers l'infini.

3. Comparer les résultats obtenus dans les questions 1. **b)** et 2. **d)**.

---

__Solution__

1. a) On sait que $S_n$ suit la loi $\mathcal{N}(0,n)$ et $\dfrac{S_n}{n}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, \dfrac{1}{n})$ (ne pas oublier que — dans le programme — le deuxième paramètre est la variance).

b) Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff :

$$P\big(\big|\frac{S_n}{n}\big| > \delta\big) \leqslant \frac{V(S_n/n)}{\delta^2} = \frac{1}{n\delta^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. a) Comme $\dfrac{S_n}{n}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1/n)$, on peut écrire :

$$P\big(\big|\frac{S_n}{n}\big| > \delta\big) = 2\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_\delta^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2} dt$$

b) Le changement de variable affine $u = t - \delta$ donne

$$P\big(\big|\frac{S_n}{n}\big| > \delta\big) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\mathrm{e}^{-n\delta^2/2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2/(2n)}\mathrm{e}^{-u\delta}du$$

c) On écrit :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u\delta}du - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2/(2n)}\mathrm{e}^{-u\delta}du &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u\delta}\big(1-\mathrm{e}^{-u^2/(2n)}\big)du\\ &\leqslant \frac{1}{2n}\int_0^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-u\delta}du\end{aligned}$$

car pour tout $x \geqslant 0$ : $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. La positivité étant évidente, la limite cherchée est donc nulle.

d) Par la question précédente, lorsque $n$ tend vers $+\infty$ :

$$P\big(\big|\frac{S_n}{n}\big| > \delta\big) \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\mathrm{e}^{-n\delta^2/2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u\delta}du = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\frac{\mathrm{e}^{-n\delta^2/2}}{\delta}$$

3. On remarque que l'équivalent obtenu en 2.d) tend vers 0 beaucoup plus rapidement que la majoration obtenue dans la question 1.b) par l'inégalité de Tchebicheff.

---

**Exercice 4.03.**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$, et pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$, ($k$ termes dans la composition).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $f$ est une homothétie, lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$.

1. Dans cette question, on suppose $n = 2$.

a) On suppose que $f$ n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe $x$ dans $E$ tel que $(x, f(x))$ soit une base de $E$. Quelle est la forme de la matrice de $f$ dans cette base ?

b) Soit $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), g\circ f = f\circ g\}$. Vérifier que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

c) Si $f$ est une homothétie. Montrer que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$ et déterminer sa dimension.

d) Si $f$ n'est pas une homothétie.

i) Montrer que pour tout $g \in \mathcal{C}(f)$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, tel que $g = \alpha Id_E + \beta f$.

ii) En déduire que $\mathcal{C}(f)$ est de dimension 2.

e) Montrer que $(Id_E, f, f^2)$ est une famille liée dans $\mathcal{L}(E)$.

2. Dans cette question, on suppose $n = 3$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $x \in E$, tel que $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de $E$.

b) Montrer que $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec $f$ si et seulement si $g \in \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2)$.

---

**Solution**

1. a) Raisonnons par contraposée.

Supposons que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Choisissons $(e_1, e_2)$ une base de $E$. Il existe donc deux scalaires $\lambda_{e_1}$ et $\lambda_{e_2}$ tels que $f(e_1) = \lambda_{e_1} e_1$ et $f(e_2) = \lambda_{e_2} e_2$. De même, comme $E$ est un espace vectoriel, $e_1 + e_2 \in E$, donc, il existe un scalaire $\lambda_{e_1+e_2}$ tel que $f(e_1 + e_2) = \lambda_{e_1+e_2}(e_1 + e_2)$.

Or par linéarité de $f$, on a aussi, $f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = \lambda_{e_1} e_1 + \lambda_{e_2} e_2$.

Puisque $(e_1, e_2)$ est une base, par unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base, on en déduit que l'on a $\lambda_{e_1+e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} (= \lambda)$. Ainsi $M_{(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $f$ est l'homothétie de rapport $\lambda$.

On en déduit que si $f$ n'est pas une homothétie, il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre, donc une base de $E$, puisque $\dim(E) = 2$.

Dans cette base, la matrice de $f$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, où $a$ et $b$ sont des scalaires.

b) Puisque $\mathcal{C}(f)$ est le noyau de l'application linéaire

$$\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E), g \mapsto g \circ f - f \circ g,$$

c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

c) Si $f$ est une homothétie, clairement $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$, et donc $\dim(\mathcal{C}(f)) = 4$.

d) i) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. Puisque $(x, f(x))$ est une base de $E$, donc une famille génératrice, on peut trouver deux scalaires $\alpha$ et $\beta$ tels que $g(x) = \alpha x + \beta f(x)$. On considère l'endomorphisme de $E$, $h = \alpha Id_E + \beta f$. Comme $\mathcal{C}(f)$ est un espace vectoriel, $h \in \mathcal{C}(f)$. De plus, $g(x) = h(x)$, donc $g(f(x)) = f(h(x))$ et ainsi, $g(f(x)) = h(f(x))$. Les deux applications linéaires $g$ et $h$ sont alors égales sur la base $(x, f(x))$ donc on a : $g = \alpha Id_E + \beta f \in \mathrm{Vect}(Id, f)$.

ii) Réciproquement, toute combinaison de $Id$ et $f$ commute avec $f$.

Ainsi, $\mathcal{C}(f) = \mathrm{Vect}(Id, f)$ est de dimension 2, car $f$ n'étant pas une homothétie, la famille $(Id_E, f)$ est libre.

e) Le cas où $f$ est une homothétie est évident. Si $f$ n'est pas une homothétie, on remarque que $f^2 \in \mathcal{C}(f)$, tout comme $Id_E$ et $f$. L'espace vectoriel $\mathcal{C}(f)$ étant de dimension 2, la famille $(Id_E, f, f^2)$ est donc liée.

2. a) Puisque $f^2 \neq 0$, il existe donc $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$.
Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ trois scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) = 0$.
En appliquant $f^2$ à cette dernière relation on en déduit

$$\lambda_0 = 0 \text{ et } \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) = 0.$$

En appliquant alors $f$, on en déduit que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 f^2(x) = 0$, puis $\lambda_2 = 0$.
Ainsi, $(x, f(x), f^2(x))$ est une famille libre de $E$.
Or $\dim(E) = 3$, on a donc : $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de $E$.

b) Soit $g$ un endomorphisme de $E$ qui commute avec $f$.
On pose $g(x) = \alpha x + \beta f(x) + \gamma f^2(x)$. Il vient que $g(f(x)) = \alpha f(x) + \beta f^2(x)$, et $g(f^2(x)) = \alpha f^2(x)$. En considérant l'endomorphisme $h = \alpha Id_E + \beta f + \gamma f^2$, on en déduit comme dans la première partie que $g = h$, donc $g \in \text{Vect}(Id_E, f, f^2)$.
De plus, $f$ commutant avec tout élément de $\text{Vect}(Id_E, f, f^2)$, on conclut :

$$\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(Id_E, f, f^2)$$

---

**Exercice 4.04.**

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est $p$, avec $0 < p < 1$. On effectue une succession indéfinie de tirages d'une boule de cette urne, les tirages ayant lieu avec remise.

1. On note $V$ (respectivement $B$) le nombre aléatoire de tirages justes nécessaires pour obtenir la première boule verte (respectivement blanche).

a) Quelles sont les lois respectives de $V$ et $B$ ?

b) Les variables aléatoires $V$ et $B$ sont-elles indépendantes ?

2. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages à partir du premier amenant le même résultat que le premier résultat et $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages amenant alors le résultat contraire.
Par exemple, et avec des notations évidentes, si on obtient la succession de résultats $VVVVBBV\ldots$, on réalise l'événement $(X = 4)$ et l'événement $(Y = 2)$.

a) Déterminer la loi de $X$. Montrer que $X$ admet une espérance que l'on calculera. Quand cette espérance est-elle minimale ? Admet-elle un maximum ?

b) Déterminer la loi de $Y$. Montrer que $Y$ admet une espérance que l'on calculera.

c) Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

---

**Solution**

1. a) $V$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ et $B$ la loi géométrique de paramètre $q = 1 - p$.

b) $P((V = 1) \cap (B = 1)) = 0 \neq pq = P(V = 1)P(B = 1)$, les variables aléatoires $V$ et $B$ ne sont pas indépendantes.

2. a) $X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, avec des notations évidentes :

$$P(X = k) = P(V_1 V_2 \dots V_k B_{k+1} \cup B_1 B_2 \dots B_k V_{k+1})$$

Soit, par incompatibilité et indépendance :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p^k q + q^k p$$

La convergence des séries rencontrées étant connue, $X$ admet une espérance, et :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(p^k q + q^k p) = pq \sum_{k=1}^{\infty} (kp^{k-1} + kq^{k-1}) = pq\Big(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{p^2}\Big) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.$$

$\rightarrow$ On a $\lim\limits_{p \to 0} E(X) = \lim\limits_{p \to 1} E(X) = +\infty$ donc l'espérance n'a pas de maximum.

$\rightarrow$ On a $E(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p} = \varphi(p)$ et $\varphi'(p) = \dfrac{2p-1}{p^2(1-p)^2}$, ce qui montre que l'espérance est minimale pour $p = \dfrac{1}{2}$.

b) En procédant comme en 2. a), pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ :

$$\begin{aligned} P((X = i) \cap (Y = j)) = P(V_1 \dots V_i B_{i+1} \dots B_{i+j} V_{i+j+1}) \\ + P(B_1 \dots B_i V_{i+1} \dots V_{i+j} B_{i+j+1}) \end{aligned}$$

Soit :

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = p^i q^j p + q^i p^j q = p^{i+1} q^j + q^{i+1} p^j$$

Et, en écrivant dans la marge :

$$\begin{aligned} \forall\, j \in \mathbb{N}^*, P(Y = j) &= \sum_{i=1}^{\infty} (p^2 q^j p^{i-1} + q^2 p^j q^{i-1} = p^2 q^j \times \frac{1}{q} + q^2 p^j \times \frac{1}{p} \\ &= p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1} \end{aligned}$$

A nouveau les séries rencontrées sont réputées convergentes, donc $Y$ admet une espérance, et :

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{\infty} j(p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}) = p^2 \times \frac{1}{p^2} + q^2 \times \frac{1}{q^2} = 2$$

c) On a : $P((X = 1) \cap (Y = 1)) = p^2 q + q^2 p = pq$, $P(X = 1) = 2pq$, $P(Y = 1) = p^2 + q^2 = 1 - 2pq$.

$\star$ Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $pq = 2pq(1-2pq)$, soit $pq = \dfrac{1}{4}$ ou encore $p - p^2 = \dfrac{1}{4}$, *i.e.* $p = \dfrac{1}{2}$.

$\star$ Si $p = q = \dfrac{1}{2}$, alors :

$P((X=i)\cap(Y=j) = (\frac{1}{2})^{i+j}$, $P(X=i) = (\frac{1}{2})^i$ et $P(Y=j) = (\frac{1}{2})^j$, donc $X$ et $Y$ sont indépendantes.

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

---

**Exercice 4.05.**

Soit $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (k_n)$ des suites réelles.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & k_n \end{pmatrix}$

Dire que la suite de matrices $(M_n)_n$ converge signifie que les neuf suites précédentes convergent et si l'on appelle $a, b, c, d, e, f, g, h$, et $k$ leurs limites respectives, on appelle $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ la limite de $(M_n)_n$.

0. Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} PM_n = PM$ et $\lim\limits_{n\to\infty} M_nP = MP$.

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour tous réels $a$ et $b$, on pose $M_{a,b} = aA + bB$ et on note $E = \{M_{a,b}; (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

2. a) Exprimer $A^2, AB, BA, B^2$ comme combinaisons linéaires de $A$ et de $B$.

b) Montrer que le produit de deux matrices de $E$ est encore une matrice de $E$ et que la multiplication dans $E$ est commutative.

3. a) Montrer que : $B^3 + B^2 - 2B = 0$.

b) Montrer que $B$ est diagonalisable.

c) Montrer que tout vecteur propre de $B$ est un vecteur propre de $A$.

d) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

4. Soit $M_{a,b}$ une matrice de $E$.

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice $M_{a,b}$ en fonction de $a$ et $b$. La matrice $M_{a,b}$ est-elle diagonalisable ?

b) Existe-t-il des matrices de $E$ inversibles ?

5. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}(M_{a,b})^k$. Montrer que la suite $(S_n)$ converge et déterminer les valeurs propres de la limite $S$ de $(S_n)$.

---

**Solution**

0. Clair.

1. $E$ est le sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $A$ et $B$. Comme $A$ et $B$ sont non proportionnelles, $(A, B)$ est une base de $E$ qui est donc de dimension 2.

2. a) On trouve $A^2 = 2A, B^2 = A - B, AB = BA = 2B$.

b) Grâce aux calculs précédents :

$$\begin{cases} M_{a,b} \times M_{c,d} = (2ac + bd)A + (2ad + 2bc - bd)B \\ M_{c,d} \times M_{a,b} = (2ca + db)A + (2cb + 2da - db)B \end{cases}$$

Ainsi $E$ est stable par multiplication, et la multiplication dans $E$ est commutative

3. a) On sait que : $B^2 = A - B$, donc $B^3 = BA - B^2 = 3B - A$. D'où :

$$B^3 + B^2 - 2B = 3B - A + A - B - 2B = 0$$

b) Soit $\lambda$ une valeur propre de $B$ et $X$ un vecteur propre associé. On a :
$0 = (B^3 + B^2 - 2B)X = (\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda)X = 0$ et

$\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$ (car $X \neq 0$)

Par ailleurs, on trouve :

$$E_0(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ E_1(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ E_{-2}(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Donc $B$ a bien trois valeurs propres et est diagonalisable.

c) On a $A = B^2 + B$, donc :

$$BX = \lambda X \implies AX = (\lambda^2 + \lambda)X$$

Les vecteurs propres de $B$ sont donc bien vecteurs propres de $A$.

d) Ainsi $A$ est diagonalisable avec la même matrice de passage $P$ diagonalisante et on peut même préciser en suivant le calcul des valeurs propres associées :

$A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(0, 2, 2)$.

4. a) $M_{a,b} = aA + bB = aP\,\mathrm{diag}(0,2,2)P^{-1} + bP\,\mathrm{diag}(0,1,-2)P^{-1}$

Ainsi : $M_{a,b} = P\,\mathrm{diag}(0, 2a+b, 2a-2b)P^{-1}$.

Ce qui prouve que $M_{a,b}$ est diagonalisable.

b) $M_{a,b}$ n'est jamais inversible car 0 est valeur propre de $M_{a,b}$.

5. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(M_{a,b})^k = P\,\mathrm{diag}(u_n, v_n, w_n)P^{-1}$

avec $u_n = 1$, $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2a+b)^k}{k!}$ et $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2a-2b)^k}{k!}$, donc :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = P\,\mathrm{diag}(1, \mathrm{e}^{2a+b}, \mathrm{e}^{2a-2b})P^{-1}$$

et le spectre est en évidence.

---

**Exercice 4.06.**

André dispose d'une pièce de monnaie biaisée qui donne Pile avec la probabilité $p \in ]0,1[$. Durant ses congés à Tambov, il décide de passer ses journées à visiter les 3 musées principaux de la ville que nous numéroterons musée 1, musée 2 et musée 3. A partir du deuxième jour, chaque matin, André décide de son programme de la journée en fonction de son programme de la veille et en lançant sa pièce de monnaie. Il suit la procédure suivante :

⋆ Si, la veille, il a visité le musée 1 et la pièce est tombée sur Pile, il poursuit sa visite du musée 1. Sinon, il visite le musée 3.
⋆ Si, la veille, il a visité le musée 2 et la pièce est tombée sur Pile, il poursuit sa visite du musée 2. Sinon, il visite le musée 1.
⋆ Si, la veille, il a visité le musée 3 et la pièce est tombée sur Pile, il poursuit sa visite du musée 3. Sinon, il visite le musée 2.

L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout entier naturel $n$ non nul , on note $X_n$ le numéro du musée visité par André le jour $n$.
Enfin, on suppose donnés des réels $a, b, c$ tels que $P(X_1 = 1) = a, P(X_1 = 2) = b$ et $P(X_1 = 3) = c$, avec $a, b, c$ positifs ou nuls et de somme égale à 1.

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $M$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = MU_n$.

2. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs colonnes propres de $J$. En déduire que $M$ est diagonalisable et préciser une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $M = PDP^{-1}$.

3. Montrer qu'il existe un triplet $(a, b, c)$ et un seul, que l'on déterminera, tel que la loi de $X_n$ ne dépende pas de $n$.

4. Dans le cas général, que dire des suites $(P(X_n = 1))_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(P(X_n = 2))_{n\in\mathbb{N}^*}$ $(P(X_n = 3))_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque $n$ tend vers l'infini ?

---

**Solution**

1. D'après l'algorithme choisi et la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 1) = pP(X_n = 1) + qP(X_n = 2)$$
$$P(X_{n+1} = 2) = pP(X_n = 2) + qP(X_n = 3)$$
$$P(X_{n+1} = 3) = pP(X_n = 3) + qP(X_n = 1).$$

Ainsi : $U_{n+1} = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ 0 & p & q \\ q & 0 & p \end{pmatrix} U_n.$

2. La résolution du système $JV = \lambda V$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ est classique :

on trouve : $\operatorname{spec} J = \{1, j, j^2\}$ et $E_1(J) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_j(J) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$E_{j^2}(J) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $J = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \operatorname{diag}(1, j, j^2)$.

On remarque que $M = pI_3 + qJ$, donc $M$ est diagonalisable via la même matrice $P$ de changement de base et $M = P\Delta P^{-1}$, avec $\Delta = \operatorname{diag}(1, p + qj, p + qj^2)$.

3. Soit $(a, b, c)$ satisfaisant les conditions de l'énoncé. Alors, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne propre de $M$ associé à la valeur propre 1. Or, comme $q \neq 0$, cet espace est de dimension 1 et est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme, de plus, $a+b+c=1$, alors l'unique vecteur satisfaisant les conditions de l'énoncé est le vecteur $\dfrac{1}{3}(1,1,1)$.

4. On a :
$U_n = M^{n-1}U_1 = P\Delta^{n-1}P^{-1}U_1 = P\,\mathrm{diag}(1,(p+qj)^{n-1},(p+qj^2)^{n-1})P^{-1}U_1$
On a $|p+qj| \leqslant |p|+|q||j| \leqslant p+q=1$ et il ne peut y avoir égalité dans cette inégalité triangulaire que si $p$ et $(1-p)j$ sont positivement liés, ce qui est absurde car $p\in\,]0,1[$. Ainsi $|p+qj|<1$ et de même $|p+qj^2|<1$

(on peut aussi faire le calcul de ces modules ...).

Ceci prouve que $U_n$ a une limite lorsque $n$ tend vers l'infini, cette limite étant $P\,\mathrm{diag}(1,0,0)P^{-1}U_1$.

On peut alors conclure en calculant $P^{-1}$, mais on peut se dispenser aussi de ce calcul, car sachant qu'il y a une limite $L$, la relation $U_{n+1}=MU_n$ donne $L=ML$ et donc $L$ (c'est une colonne !) est la solution de la question 3.
Les trois suites convergent vers $\dfrac{1}{3}$.

---

**Exercice 4.07.**

Pour tout $\alpha>0$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n(\alpha)=\dfrac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\alpha+k)}$.

1. Montrer que la suite $(a_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.

2. Montrer que la suite $(a_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.

3. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0}[\ln(a_{n+1}(\alpha))-\ln(a_n(\alpha))]$. En déduire que $\ell=0$.

4. Pour tout $\alpha>0$, soit $X_\alpha$ une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha$. On pose $Y_\alpha = 1-\mathrm{e}^{-X_\alpha}$.

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer que $Y_\alpha$ admet un moment d'ordre $n$, noté $m_n(\alpha)=E(Y_\alpha^n)$.

b) Trouver une relation simple entre $m_n(\alpha+1)$ et $m_{n+1}(\alpha)$.

c) Prouver que $m_n(\alpha)=\alpha\,a_n(\alpha)$.

5. Montrer que, pour $\alpha>2$, la série $\sum\limits_{n\geq 0}a_n(\alpha)$ est convergente.

---

**Solution**

1. La suite $(a_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car $a_n(\alpha)>0$ et
$$\frac{a_{n+1}(\alpha)}{a_n(\alpha)}=\frac{n+1}{\alpha+n+1}<1.$$

2. La suite $(a_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente.

3. On a :
$\ln(a_{n+1}(\alpha)) - \ln(a_n(\alpha)) = \ln\big(\dfrac{n+1}{\alpha+n+1}\big) = \ln\big(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+n+1}\big) \underset{(\infty)}{\sim} -\dfrac{\alpha}{n} \leqslant 0.$
Par théorème de comparaison avec la série harmonique (de signe fixe) la série diverge. Comme c'est une série à termes négatifs, ses sommes partielles $\ln(a_n(\alpha)) - \ln(a_0(\alpha)$ tendent vers $-\infty$, d'où, par passage à la limite dans $a_n(\alpha) = \mathrm{e}^{\ln(a_n(\alpha))}$, on a : $\ell = 0$.

4. a) Par théorème de transfert cela revient à montrer la convergence absolue (mais ici tout est positif) de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}\big(1-\mathrm{e}^{-t}\big)^n\,dt$.
Ici la convergence résulte du théorème de comparaison car : $0 \leqslant \alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}(1 - \mathrm{e}^{-t}\big)^n \leqslant \alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}\,dt$ converge.

b) Par intégration par parties (préparée en écrivant $\mathrm{e}^{-(\alpha+1)t} = \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-t}$), pour tout $A \geqslant 0$, on a :

$$\int_0^A (\alpha+1)\mathrm{e}^{-\alpha t}\big[\mathrm{e}^{-t}(1-e^{-t})^n\big]\,dt = \Big[(\alpha+1)\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{(1-\mathrm{e}^{-t})^{n+1}}{n+1}\Big]_0^A - \int_0^A -\alpha(\alpha+1)\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{(1-\mathrm{e}^{-t})^{n+1}}{n+1}\,dt$$

Enfaisant tendre $A$ vers $+\infty$ on obtient :

$$m_n(\alpha+1) = \frac{\alpha+1}{n+1}m_{n+1}(\alpha)$$

c) On montre par récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation : $\forall\,\alpha > 0, m_n(\alpha) = \alpha a_n(\alpha)$.

$\rightarrow$ $m_0(\alpha) = E(1) = 1$ et $a_0(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$ donc c'est bien parti.

$\rightarrow$ L'hérédité est claire car $m_n(\alpha+1) = \dfrac{\alpha+1}{n+1}m_{n+1}(\alpha)$ et $a_n(\alpha+1) = \dfrac{\alpha}{n+1}a_{n+1}(\alpha)$.

D'où la conclusion.

5. Pour $\alpha > 2$, d'après la relation de récurrence et d'après la question 1, on a :

$$0 \leqslant a_n(\alpha) = \frac{\alpha-1}{n+1}a_{n+1}(\alpha-1) = \frac{\alpha-2}{n+2}\times\frac{\alpha-1}{n+1}a_{n+2}(\alpha-2) = o(1/n^2),$$

car $a_{n+2}(\alpha-2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (question 3). D'où le résultat par théorème de comparaison sur les séries.

---

**Exercice 4.08.**

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe.

Pour tout $n \geqslant 0$, on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

2. On suppose dans cette question que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle.

**a)** Montrer que la série de terme général $(a_k - a_{k+1})$ est convergente.

**b)** En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n b_n$ est convergente.

3. Applications.

**a)** Soit $\alpha > 0$. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ?

**b)** Soit $\theta \in \,]0, \pi]$ et $\alpha > 0$. Calculer pour tout $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.

En déduire la nature des séries $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$, pour $\alpha > 0$ et $\theta \in \,]0, \pi]$. Retrouver le résultat de la question 3. **a)**.

---

**Solution**

1. Bien évidemment $b_k = B_k - B_{k-1}$ qui reste vérifié pour $b_0$ en posant $B_{-1} = 0$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \end{aligned}$$

2. a) On a pour $n \geqslant 1$ : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n$, de limite $a_0$ lorsqu $n$ tend vers l'infini : ceci montre que la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge.

b) Soit $M$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leqslant M$. La série de terme général $(a_k - a_{k+1})B_k$ est absolument convergente, puisque $|(a_k - a_{k+1})B_k| \leqslant M(a_k - a_{k+1})$. La suite $(a_n B_n)$ tend vers 0. Ainsi la suite $(S_n)$ est-elle la somme d'une suite convergente vers 0 et la somme partielle d'une série absolument convergente : la suite $(S_n)$ admet une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

3. a) Ici, la suite $(1/n^\alpha)_n$ est décroissante vers 0 (car $\alpha > 0$) et si $b_n = (-1)^n$, alors $|B_n| \leqslant 1$. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge. Cette série est même absolument convergente dès que $\alpha > 1$.

b) Avec $b_n = \mathrm{e}^{in\theta}$, on a : $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{1-\mathrm{e}^{in\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}$, et :

$$|B_n| \leqslant \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{i\theta}|}$$

La suite $(1/n^\alpha)_n$ est décroissante de limite nulle (car $\alpha > 0$). On en conclut que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge, donc que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ convergent.

On retrouve le résultat de la question précédente lorsque $\theta = \pi$.

---

**Exercice 4.09.**

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$, avec $n \geqslant 2$.

Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note $N$ la variable aléatoire égale au numéro du tirage à l'issue duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Déterminer $N(\Omega)$.

2. Pour tout $k$ de $[\![1, n]\!]$, calculer $P(N > k)$. En déduire la loi de $N$.

3. Montrer que $E(N) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(N > k)$.

4. Soit $F_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

a) Montrer que $F_n$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire $T_n$ à densité.

b) Montrer que $T_n$ a une espérance et l'exprimer en fonction de $E(N)$.

---

**Solution**

1. Il faut faire au moins deux tirages pour obtenir une boule déjà tirée et, au pire, on peut obtenir $n$ numéros distincts lors des $n$ premiers tirages et le $(n+1)$-ème donnera à coup sûr un numéro déjà obtenu auparavant. Les valeurs intermédiaires étant toutes possibles, on a : $N(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

2. L'événement $[N > k]$ est «au cours des $k$ premiers tirages, on a obtenu des numéros tous distincts».
Il y a donc $n$ façons de choisir la première boule, puis $(n-1)$ façons de choisir la deuxième, ..., puis enfin $(n-k+1)$ façons de choisir la $k$-ème, ce qui fait en tout $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ cas favorables à la réalisation de cet événement. Comme le nombre de cas possibles en $k$ tirages est $n^k$ (nombre de $k$-listes d'éléments choisis dans $[\![1,n]\!]$), on a :

$$P(N > k) = \frac{A_n^k}{n^k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geqslant n+1 \\ \dfrac{n!}{(n-k)!n^k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \end{cases}\cdot$$

On écrit alors :

$P(N > k-1) = P(N = k) + P(N > k)$ et $P(N = k) = P(N > k-1) - P(N > k)$

Donc :

$$\begin{aligned} P(N = k) &= \frac{n!}{(n-k+1)!n^{k-1}} - \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{n!}{(n-k+1)!n^k}(n-(n-k+1)) \\ &= \frac{n!(k-1)}{(n-k+1)!n^k} \end{aligned}$$

(cette formule finale est valable pour $k = 1$ et aussi pour $k = n+1$)

3. Résultat classique : il suffit d'écrire :

$$E(N) = \sum_{k\geq 2} kP(N = k) = \sum_{k=2}^{n+1} kP(N = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k(P(N > k-1) - P(N > k))$$

On «coupe» la somme en deux et par décalage de l'indice dans la première somme, on obtient le résultat.

4. a) Vérifions les points caractérisant la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité :

$\to$ La fonction $F_n$ admet une limite nulle en $-\infty$ (évident) et égale à 1 en $+\infty$ (croissances comparées).

$\to$ La fonction $F_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ (on a bien raccordé en 0). Elle est de classe $C^1$, sauf peut être en 0, et croissante, car pour tout $x > 0$, on a :

$$f_n(x) = F_n'(x) = (1 + \tfrac{x}{n})^n \mathrm{e}^{-x} - (1 + \tfrac{x}{n})^{n-1}\mathrm{e}^{-x} = \tfrac{x}{n}(1 + \tfrac{x}{n})^{n-1}\mathrm{e}^{-x} > 0$$

b) Pour tout réel $A$ positif, à l'aide d'une intégration par parties, il vient

$$\int_0^A t f_n(t)dt = [t(F_n(t) - 1)]_0^A + \int_0^A (1 - F_n(t))dt$$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty} A(1 - F_n(A)) = 0$ (croissances comparées) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_n(t))dt$ converge puisqu'au voisinage de $+\infty$, on a $1 - F_n(t) \sim \dfrac{1}{n!} t^n \mathrm{e}^{-t}$. Finalement :

$$E(T_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(t))dt$$

Or $1 - F_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{t^k e^{-t}}{n^k}$ et :

$$E(T_n) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{t^k e^{-t}}{n^k} dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-t}}{n^k} dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{n^k}$$

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!n^k} = E(N)$$

---

**Exercice 4.10.**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme $u$ de $E$ est appelé un projecteur lorsque $u^2 = u \circ u = u$.
Soit $p$ et $q$ deux projecteurs tels que $p \circ q = q \circ p$. On pose $f = p + q$ et $g = p \circ q$

1. Montrer que les valeurs propres éventuelles d'un projecteur appartiennent à $\{0, 1\}$.

2. Montrer que $g$ est un projecteur.

3. a) Montrer que si $x$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$ de $f$, alors $x$ est un vecteur propre de $g$ et déterminer la valeur propre correspondante.

b) Quelles sont les valeurs propres possibles de $f$ ? Montrer que $-1$ n'est pas valeur propre de $f$.

4. a) Montrer que 0 est valeur propre de $f$ si et seulement si $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \neq \{0\}$.

b) Montrer que 2 est valeur propre de $f$ si et seulement si $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \neq \{0\}$.

---

**Solution**

1. Soit $p$ un projecteur, $a$ une valeur propre de $p$ et $x$ un vecteur propre associé à la valeur propre $a$.
$p \circ p(x) = p(x) \iff a^2 x = ax \iff a(a-1)x = 0 \iff a(a-1) = 0$ car $x \neq 0$.
Donc $a = 0$ ou $a = 1$.

2.On a : $g \circ g = (p \circ q) \circ (p \circ q) = (q \circ p) \circ (p \circ q) = q \circ (p \circ p) \circ q = q \circ p \circ q$
$= (q \circ q) \circ p = q \circ p = g$.

3. a) Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$ et $x$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$. On a : $f(x) = \lambda x = p(x) + q(x)$

De plus $f^2(x) = \lambda^2 x = p^2(x) + q^2(x) + 2p \circ q(x)$ car $p$ et $q$ commutent.

Donc : $\lambda^2 x = p(x) + q(x) + 2g(x) = \lambda x + 2g(x)$.

Donc $g(x) = \dfrac{\lambda(\lambda-1)}{2}x$ et comme $x$ est non nul, on conclut.

b) Or $g$ est un projecteur, donc $\dfrac{\lambda(\lambda-1)}{2} = 0$ ou $\dfrac{\lambda(\lambda-1)}{2} = 1$ ce qui équivaut à $\lambda \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

Supposons que $-1$ est une valeur propre de $f$. Soit $x$ un vecteur propre associé à la valeur propre $-1$.

$f(x) = -x \implies f^2(x) = x \implies f(x) + 2g(x) = x \implies g(x) = x$.

Mais $f(x) = -x$ s'écrit $p(x) + q(x) = -x$, d'où $q \circ p(x) + q(x) = -q(x)$, soit $g(x) = -2q(x)$ et donc $x = -2q(x)$.

Ainsi $-\dfrac{1}{2}$ serait valeur propre de $q$ ce qui n'est pas raisonnable. Donc :

$$\mathrm{spec}(f) \in \{0, 1, 2\}$$

4. a) $\star$ Si $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$ avec $x \neq 0$. Alors $p(x) = q(x) = 0$ et $f(x) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$.

$\star$ Si 0 est valeur propre de $f$, alors il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = 0$ et donc $g(x) = 0$, d'après 3. De plus, $p(x) + q(x) = 0$, donc en appliquant $p$, on a $p(x) + g(x) = 0$ et donc $p(x) = 0$. On a donc également $q(x) = 0$, d'où $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$ et $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0\}$.

$$0 \in \mathrm{spec}\, f \iff \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0\}$$

b) $\star$ Si 2 est valeur propre de $f$, alors il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = 2x$ et donc $g(x) = x$, d'après 3. Donc $p \circ q(x) = q \circ p(x) = x$ et $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$. D'où $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0\}$.

$\star$ Si $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0\}$, soit $y \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$ tel que $y \neq 0$. Il existe $x$ et $x'$ dans $E$ tels que $y = p(x)$ et $y = q(x')$. Alors $f(y) = p(y) + q(y) = p^2(x) + q^2(x') = p(x) + q(x') = 2y$. Ainsi $y$ est vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre 2.

$$2 \in \mathrm{spec}\, f \iff \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0\}$$

---

**Exercice 4.11.**

Soit $a$ un réel. On note $E_a$ l'espace vectoriel des suites $u = (u_n)_n$ de nombres réels vérifiant :

$$\forall\, n \geqslant 0, u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. Montrer que $\varphi : E_a \to \mathbb{R}^2, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme. En déduire la dimension de $E_a$.

2. Dans cette question, on suppose $a \neq 1$. Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & (1+a) \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice $A$ est diagonalisable et en déduire $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour $n \geqslant 0$, on définit le vecteur colonne : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Exprimer $X_{n+1}$ en fonction de $A$ et $X_n$ puis $X_n$ en fonction de $A^n$ et $X_0$. En déduire l'expression de $u_n$.

3. Déterminer $u_n$ en fonction de $u_0$ et $u_1$ dans le cas $a = 1$.

4. Décrire en fonction de $a$ l'ensemble $F_a$ constitué des suites bornées de $E_a$.

5. Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{1}{-a + (1+a)x - x^2}$.

a) Montrer que pour tout $x \neq 1, x \neq a$, on a :

$$(-a + (1+a)x - x^2)f^{(n)}(x) + (n(1+a-2x))f^{(n-1)}(x) - n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

b) Pour $a \neq 0$, montrer que la suite $n \mapsto u_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ appartient à $E_{1/a}$ et en déduire $f^{(n)}(0)$.

---

**Solution**

1. La linéarité de $\varphi$ est claire.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La relation de récurrence montre qu'il existe une suite et une seule dans $E_a$ telle que $u_0 = a$ et $u_1 = b$, donc $\varphi$ est un isomorphisme de $E_a$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc $\dim E_a = 2$.

2. a) Avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ :

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} y = \lambda x \\ -ax + (1+a)y = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \lambda x \\ (\lambda^2 - (1+a)\lambda + a)x = 0 \end{cases}$$

Les valeurs propres de $A$ sont donc 1 et $a$ et : $E_1 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_a = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

$A$ est diagonalisable et : $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{1-a}\begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

d'où : $A^n = PD^nP{-}1 = \dfrac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a(1-a^{n-1}) & a^n - 1 \\ a(1-a^n) & a^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$

ou si on préfère la forme polynomiale :

$$A^n = \begin{pmatrix} -a(1 + a + \cdots + a^{n-2}) & (1 + a + \cdots + a^{n-1}) \\ -a(1 + a + \cdots + a^{n-1}) & (1 + a + \cdots + a^n) \end{pmatrix}$$

c) Comme d'habitude : $X_n = A^n X_0$, d'où :

$$u_n = \frac{1}{a-1}((a - a^n)u_0 + (a^n - 1)u_1) = \frac{au_0 - u_1}{a-1} + a^n\frac{u_1 - u_0}{a-1}$$

3. Si $a = 1$, la relation de récurrence devient $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ et la suite $u$ est arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison $u_1 - u_0$.
Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n(u_1 - u_0)$

4. Notons que $F_a$ contient la suite nulle et est stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de $E_a$.

$\star$ Si $a = 1$ : $u_n = n(u_1 - u_0) + u_0$ est bornée si et seulement si $u_1 = u_0$, $F_1$ est donc l'ensemble des suites constantes.

$\star$ Si $|a| > 1$ $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si $u_0 = u_1$, on a alors $\forall\, n, u_n = u_0$ et $F_a$ est l'ensemble des suites constantes.

$\star$ Si $|a| < 1$, alors $F_a = E_a$.

5. Le dénominateur de $f$ s'annule pour $x = 1$ et $x = a$ («et» si $a \neq 1$ !), et la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ privé des pôles.

Soit $x \neq 1, x \neq a$.

On a :

$$(-a + (1 + a)x - x^2)\times f(x) = 1$$

et, par la formule de Leibniz, ou par récurrence, pour tout $n \geqslant 2$ :

$$\binom{n}{0}(-a+(1+a)x-x^2)\times f^{(n)}(x)+\binom{n}{1}(1+a-2x)\times f^{(n-1)}(x)+\binom{n}{2}(-2)\times f^{(n-2)}(x) = 0$$

En remplaçant les coefficients binômiaux par leurs valeurs, on obtient le résultat demandé.

En particulier, au point 0 (puisque l'on suppose $a \neq 0$) :

$$-af^{(n)}(0) + n(1 + a)f^{(n-1)}(0) - n(n - 1)f^{(n-2)}(0) = 0$$

Soit, en divisant par $n!$ et en posant $u_n = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$ :

$$-au_n + (1 + a)u_{n-1} - u_{n-2} = 0$$

Ce qui s'écrit encore : $\forall\, n \geqslant 2, u_n = (1 + \dfrac{1}{a})u_{n-1} - \dfrac{1}{a}u_{n-2}$

et la suite $u$ appartient à $E_{1/a}$.

Avec $f(x) = \dfrac{1}{-a + (1 + a)x - x^2}$ et $f'(x) = -\dfrac{1 + a - 2x}{(-a + (1 + a)x - x^2)^2}$, il vient :

$u_0 = f(0) = -\dfrac{1}{a}$ et $u_1 = f'(0) = -\dfrac{1 + a}{a^2}$, d'où en reportant dans l'expression de $u_n$ :

$\star$ Si $a = 1$, $u_n = u_0 + n(u_1 - u_0) = -1 - n$.

$\star$ Si $a \neq 1$, $u_n = \dfrac{u_0 - au_1}{1 - a} + \dfrac{1}{a^{n-1}}\times\dfrac{u_1 - u_0}{1 - a}$ et il suffit de remplacer.

---

**Exercice 4.12.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - x^2$.

1. Montrer que $f$ induit une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur un intervalle à préciser.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$x_0 = -2 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, x_n - x_n^2 = x_{n-1} \text{ et } x_n < 0$$

2. a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi bien définie.

b) Etudier la convergence de cette suite.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = x_{n+1} - x_n$, $v_n = \ln(1 + u_n)$, $w_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + u_k)$.

a) Etudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et préciser la valeur de sa somme.

b) Etudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ et donner un majorant de sa somme.

c) Prouver la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser un encadrement de sa limite.

---

**Solution**

1. La fonction $f$ est dérivable et $f'(x) = 1 - 2x$, donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et induit une bijection $\varphi$ de $\mathbb{R}_-$ sur $]\lim\limits_{-\infty} f, f(0)] = ]-\infty, 0]$.

2. a) On veut donc $f(x_n) = x_{n-1}$ et $x_n < 0$. Tant que $x_{n-1}$ est strictement négatif, cela définit parfaitement $x_n$ par la relation $x_n = \varphi^{-1}(x_{n-1})$. Comme $x_0 < 0$ et $\mathbb{R}_-$ stable par $\varphi^{-1}$, le principe de récurrence permet d'affirmer que la suite $(x_n)$ est bien définie (et à valeurs négatives).

b) $\varphi^{-1}$ est croissante, donc la suite $(x_n)$ est monotone.
On a $x_0 = -2$ et $x - x^2 = -2 \iff x = -1$ ou $x = 2$ et donc $x_1 = -1$ et la suite $(x_n)$ est croissante.
Croissante et majorée la suite $(x_n)$ est convergente.
Sa limite $\ell$ vérifie $\ell - \ell^2 = \ell$, donc $\ell = 0$.

3. La suite $(x_n)$ est croissante, donc $v_n$ est bien défini !

a) $\sum_{n=0}^{N} u_n = x_{N+1} - x_0 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} -x_0 = 2$.

b) Comme $(u_n)$ est positive de limite nulle, on a $v_n \underset{(\infty)}{\sim} u_n$ et la convergence de $\sum v_n$ s'en déduit.

D'autre part, on sait que $\ln(1+u_n) \leqslant u_n$ et donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = 2$.

c) $w_n$ est strictement positif et $\ln(w_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$, donc la suite $(\ln(w_n))_n$ converge et sa limite $\ell$ est inférieure ou égale à 2, donc la suite $(w_n)_n$ converge de limite inférieure ou égale à $\mathrm{e}^2$.

Enfin $w_0 = 1 + x_1 - x_0 = 2$, donc par croissance évidente de la suite $(w_n)_n$, on a $\lim w_n \geqslant 2$.

---

**Exercice 4.13.**

Soit $x, y, z$ des réels. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n \text{ avec } u_0 = x, u_1 = y, u_2 = z$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

2. Montrer pour tout $n \geqslant 0$, la relation $U_{n+3} = 4U_{n+2} - U_{n+1} - 6U_n$ et en déduire un polynôme $P$ de degré 3 tel que $P(A) = 0$. Vérifier que $P(-1) = 0$.

3. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on note $R_n = a_n + b_nX + c_nX^2$ le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $P$. Montrer successivement :

   $\star$ $A^n = R_n(A)$.

   $\star$ $U_n = a_nU_0 + b_nU_1 + c_nU_2$

   $\star$ $u_n = {}^tU_0 \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

4. Déterminer une matrice inversible $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 2^n \\ 3^n \end{pmatrix}$ et en déduire que : $u_n = {}^tU_0M^{-1} \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 2^n \\ 3^n \end{pmatrix}$

5. a) Déduire de l'expression précédente que $u_n$ peut s'écrire sous la forme :

$$u_n = K_1(x,y,z).(-1)^n + K_2(x,y,z).2^n + K_3(x,y,z).3^n$$

où $K_1, K_2, K_3$ sont 3 fonctions à déterminer.

b) Donner un équivalent simple de $u_n$ selon les valeurs de $K_1(x,y,z), K_2(x,y,z)$ et $K_3(x,y,z)$.

6. Soit $F = \{U_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\ /\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

---

**Solution**

1. $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = AU_n$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Par une récurrence immédiate, pour $n \geqslant 0$, on a $U_n = A^n U_0 = A^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2. Soit $n \geqslant 0$, on a :

$4U_{n+2} - U_{n+1} - 6U_n = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n \\ 4u_{n+3} - u_{n+2} - 6u_{n+1} \\ 4u_{n+4} - u_{n+3} - 6u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+4} \\ u_{n+5} \end{pmatrix} = U_{n+3}$

soit encore pour $n = 0$ :

$U_3 - 4U_2 + U_1 + 6U_0 = 0$, *i.e.* $(A^3 - 4A^2 + A + 6I).U_0 = 0$

Ce calcul ne dépendant pas de la valeur de la colonne $U_0$, il vient :

$$P = X^3 - 4X^2 + X + 6 \text{ est de degré 3 et vérifie } P(A) = 0.$$

On vérifie que $P(-1) = 0$, ce qui permet d'achever la factorisation :

$$P = (X+1)(X-2)(X-3)$$

3. $\star$ par définition de la division euclidienne : $X^n = P(X)Q(X) + R_n(X)$, donc $A^n = P(A)Q(A) + R_n(A) = R_n(A)$, car $P(A) = 0$.

$\star$ D'où : $U_n = A^n.U_0 = R_n(A).U_0 = (a_n I + b_n A + c_n A^2)U_0 = a_n U_0 + b_n U_1 + c_n U_2$.

$\star$ En prenant la première ligne de cette égalité, on obtient :

$u_n = a_n x + b_n y + c_n z = {}^tU_0 \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

4. On a $X^n = P(X)Q(X) + R_n(X)$, ce qui donne en utilisant les trois racines de $P$ :

$\begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + 2b_n + 4c_n = 2^n \\ a_n + 3b_n + 9c_n = 3^n \end{cases}$ Soit : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 2^n \\ 3^n \end{pmatrix}$

Toute méthode montre que la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ainsi déterminée est inversible, et :

$$u_n = {}^tU_0 \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = {}^tU_0 M^{-1} \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 2^n \\ 3^n \end{pmatrix}$$

5. a) On trouve : $M^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 12 & -6 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ et on en déduit :

$$\begin{aligned} {}^tU_0 M^{-1} &= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6x - 5y + z & 12x + 8y - 4z & -6x - 3y + 3z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K_1(x,y,z) & K_2(x,y,z) & K_3(x,y,z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi : $u_n = K_1(x,y,z).(-1)^n + K_2(x,y,z).2^n + K_3(x,y,z).3^n$

b) si $K_3(x,y,z) \neq 0$, soit $2x + y - z \neq 0$ : $u_n \sim K_3(x,y,z).3^n$.

Si $K_3(x,y,z) = 0$ et $K_2(x,y,z) \neq 0$, soit $2x + y - z = 0$ et $3x + 2y - z \neq 0$ : $u_n \sim K_2(x,y,z).2^n$.

Si $K_3(x,y,z) = K_2(x,y,z) = 0$, soit $2x + y - z = 0$ et $3x + 2y - z = 0$ : $u_n = K_1(x,y,z).(-1)^n$, ce que l'on ne peut pas simplifier.

6. $(u_n)$ est bornée si et seulement si $K_2(x,y,z) = 0$ et $K_3(x,y,z) = 0$.

Donc $F$ est l'intersection de deux plans de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et cette intersection est la droite dirigée par la colonne ${}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.