

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ÉCRIT

Pascal Massart, Patricia Reynaud-Bouret

Coefficient : 3

Durée : 4 heures

Le sujet comportait deux problèmes plutôt classiques. Le premier était un problème d'algèbre portant sur les matrices de Van der Monde et les vecteurs totalisateurs. Le deuxième était un problème d'analyse et de probabilité portant sur les propriétés de la fonction ou de la loi exponentielle, le but final étant de prouver les propriétés fondamentales du processus de Poisson.

Dans les deux problèmes, les questions étaient très progressives, les définitions et les formules utiles étaient rappelées. Plusieurs questions étaient essentiellement du cours, en particulier les trois premières questions du problème d'algèbre. La question 3 b) du problème II était quant à elle une question de bon sens, ne faisant appel qu'à la notion d'événements. De même la question c) des Préliminaires du Problème II était quasiment immédiate. Nous tenons d'ailleurs à rappeler dans ce rapport (comme il a été fait tout au long du sujet) qu'il n'est nullement nécessaire de traiter les questions dans l'ordre, et que le candidat peut tout à fait admettre les questions précédentes, à condition que les numéros des questions traitées et admises soient clairement écrits.

Les copies furent assez visiblement de deux sortes, celles qui passaient les questions "de cours" ou de "bon sens" et qui avaient au moins 2, et celles qui ne les passaient pas. Parmi les copies ayant plus de 2 (soit environ les 3/4 des candidats), il faut noter un meilleur étalement des notes par rapport aux années précédentes, les candidats ayant réussi à traiter plus de points dans le sujet. De plus, les candidats ont généralement traité de manière équivalente les deux problèmes à la différence de l'année dernière où le problème de probabilité n'était traité que par les meilleurs. Il y avait quelques très bonnes copies ayant traité quasiment l'intégralité du sujet.

Voici quelques fautes récurrentes commises par les candidats qui nous ont révélé un vrai problème de compréhension.

- L'utilisation de jeux d'écriture complètement fantaisiste aux deux premières questions du Problème I, du type " $f(\text{Ker } g) = \text{Ker } f \circ g$ " ou " $\text{Ker } g(x)$ ", trahit la profonde incompréhension pour certains candidats du sens même de ce qu'ils écrivent.
- A la question 2 a) du Problème I, une quantité alarmante à nos yeux de candidats n'ont même pas écrit une matrice carrée 2×2 , mais des matrices rectangulaires dont ils cherchaient à montrer quand même l'inversibilité.
- Un nombre assez important de candidats semblent aussi croire que (au choix) une matrice carrée est toujours inversible, qu'une matrice diagonalisable est toujours inversible, qu'une matrice inversible est toujours diagonalisable.
- Beaucoup de candidats confondent aussi équivalence au sens matriciel et équivalence analytique (quand les variables tendent vers l'infini).

- Les questions 5 a) et 5 b) du problème I demandaient de prouver que $\mathbb{R}[f]$ et le commutant de f étaient des sous-espaces vectoriels. Certains candidats, ne comprenant manifestement pas les notations ensemblistes, ont alors tenté de prouver par exemple que $\mathbb{R}[f + g] = \mathbb{R}[f] + \mathbb{R}[g]$ ou ont prouvé la linéarité de tout $P(f)$ (P polynôme) en tant qu'endomorphisme en pensant sincèrement prouver que $\mathbb{R}[f]$ était stable par combinaisons linéaires.
- Passons maintenant à l'analyse. Un grand nombre de candidats essaie de mener un raisonnement du type raisonnement par l'absurde : ils supposent que $g(0) = 1$ à la question a) des Préliminaires et après calculs se basant sur cette hypothèse "prouvent" alors que $g(0) = 1$.
- La faute la plus récurrente de cette session fut sans contexte celle qui consiste à la question c) des Préliminaires à appliquer la définition p/q fois sans se rendre compte que p/q est un rationnel et non un entier.
- Beaucoup de candidats confondent réel et rationnel et malgré l'aide donnée par l'énoncé à la question d) des préliminaires, concluent que tout le travail a été fait en c) et ne passent pas à la limite.
- Finalement, les probabilités ont été comparativement l'objet de moins d'erreurs, sauf celle qui consiste à calculer $P(\lambda e^{-\lambda X} > x)$ pour la fonction de queue de la loi exponentielle. Cela révèle ainsi que certains candidats n'ont aucune idée de ce qu'est une densité de probabilité.