

# COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

## ÉPREUVE COMMUNE : ÉCRIT

Patricia Reynaud-Bouret, Gilles Stoltz

**Coefficient** : 3

**Durée** : 4 heures

### COMMENTAIRES GÉNÉRAUX

Commençons par un point très important. Jusqu'à cette année, la calculatrice était autorisée à l'écrit. Elle sera interdite à partir de la session 2007. Elle n'est pas nécessaire à l'épreuve, et pire, peut même induire les candidats en erreur (comme nous le verrons dans la suite du rapport).

En ce qui concerne le sujet de cette année, les candidats ont probablement été surpris par la quantité de questions ayant trait à l'analyse, présente dans toutes les parties du sujet. Cela ne s'était pas produit depuis plusieurs années. Si cela a aidé les moins bons candidats, finalement plus à l'aise dans ce domaine dont les fondements et techniques simples sont étudiés au lycée, les meilleurs candidats ont pu être déstabilisés par leur incapacité à écrire des preuves propres dans ce domaine. Cette impression a été probablement renforcée par la séparation depuis cette année des épreuves de mathématiques du concours B/L d'avec celui des administrateurs de l'INSEE, parmi lequel on trouvait les copies présentant les démonstrations les plus précises.

Le sujet était long, le candidat ayant eu 20 a abordé à peine plus des trois quarts du sujet – cela est intentionnel : le sujet est conçu pour permettre aux candidats d'avoir un certain choix dans les questions à résoudre. Nous avons cependant noté avec plaisir que sur l'ensemble des copies, toutes les questions ont été traitées, à part la question 7c du problème I, qui était la plus difficile de l'épreuve.

Nous avons cette année encore constaté qu'il existait deux catégories de candidats : ceux qui ont assimilé leur cours et ont travaillé les mathématiques durant l'année, et ceux qui ont essayé de survivre avec leurs souvenirs de lycée. Ces derniers ont naturellement les moins bonnes notes, mais nous avons pu les classer (contrairement à l'année précédente) grâce à la première question de l'exercice, qui s'est révélée déterminante pour eux. Il s'agissait de tracer le tableau de variations d'une fonction très simple. Malheureusement, ceux qui ne savaient plus comment on traçait un tel tableau pensaient trouver en leur calculatrice une planche de salut ; ils improvisaient alors un tracé de fonction, souvent faux ou très lacunaire (et visiblement lu sur leur machine) sans même penser à donner la dérivée et à étudier son signe, ce que nous ne pouvons accepter. C'est à cause de et pour ces candidats que nous voulons interdire la calculatrice désormais.

### COMMENTAIRES PLUS SPÉCIFIQUES

*Sur l'ensemble du sujet.* A propos de la présentation, le jury aimerait que tous les candidats numérotent leurs réponses aux questions, surtout lorsqu'ils ne traitent pas ces dernières dans l'ordre (ce qui, naturellement, est leur droit), et qu'ils les séparent mieux les unes des autres. Il est agaçant, mais évidemment pas sanctionné, que les candidats recopient l'énoncé de la question (cela rend parfois difficile la distinction entre solution ou énoncé). Il faut employer les raccourcis et abréviations avec la plus grande parcimonie ; à titre d'exemple, les termes FPT ("formule des probabilités totales", vu le contexte) ne font pas partie des notations usuelles.

Les problèmes usuels de logique demeurent : l'utilisation excessive et à tort du symbole d'équivalence  $\Leftrightarrow$  ; certains confondent causes et conséquences, et indiquent donc, par exemple,

des conditions nécessaires quand on leur demande des conditions suffisantes ; enfin, une erreur typique de la question c des préliminaires du problème I a été de penser que  $(a, b) \neq (1, 1)$  et  $b \neq 1$  impliquent  $a = 1$ , alors qu'il ne suffisait évidemment pas d'étudier  $g(1, b)$ .

*Exercice.* Cet exercice était un exercice classique d'analyse, qui ne mobilisait que le cours et qui, surtout, ne demandait de montrer aucun résultat abstrait. Il était destiné à classer les candidats les plus faibles et il a parfaitement accompli son rôle. Soulignons quand même quelques fautes impardonnables.

- Plusieurs candidats ne savent toujours pas dériver la fonction exponentielle.
- L'existence du réel  $M$  de la question 2 a été l'une des questions les plus mal traitées de tout le sujet. Les candidats qui récitaient la phrase "la fonction est bornée et atteint ses bornes" éprouvaient trop souvent des difficultés à comprendre ce que cela pouvait bien vouloir dire. En particulier, s'ils réalisaient parfois que cela donnait un majorant de la fonction, ils ne comprenaient pas le caractère borné en termes de minorant. D'autres n'ont pas vu le problème de l'uniformité et se sont appliqués à montrer que pour tout  $x$ , il existe  $M$  vérifiant la condition, alors que l'objet de la question était que ce  $M$  ne dépende pas de  $x$ .
- Les développements limités sont vraiment mal maîtrisés et souvent faux (cela, même dans les bonnes copies).

*Problème I.* Le problème I constituait la partie la plus difficile de l'épreuve et a été ressenti comme tel. Il mêlait algèbre, calcul des probabilités et analyse, avec pour but l'étude d'une chaîne de Markov à deux états (qui est d'ailleurs, vu le programme, le seul cas que les candidats peuvent étudier). Il a été finalement mieux traité que ce que l'on pouvait prévoir, car beaucoup de candidats n'ont pas hésité à sauter certaines questions et à avancer dans le sujet. Nous continuons à encourager cette pratique qui permet au candidat de montrer ce qu'il sait faire.

- Pour les préliminaires, notons que si on demande de "montrer que", on attend autre chose qu'un simple recopiage de l'énoncé. Cela ne paraît pas évident à beaucoup de candidats. Plus fondamentalement, il faut garder à l'esprit l'objectif donné par le sujet : montrer certaines convergences (vers 0 ou 1/2). Pour les questions c et d, il ne fallait pas hésiter à majorer, même brutalement, tant que le résultat s'ensuivait. Presqu'aucun candidat n'y a pensé, et beaucoup se sont embourbés dans des calculs exacts délicats.
- Quand on demande à la question 1 de "donner la loi", on souhaite aussi le nom de la loi quand elle est connue.
- La partie sur le calcul matriciel a encore fourni son long cortège de fautes. Les candidats ne vérifient pas systématiquement l'adéquation du nombre de lignes et de colonnes au moment de multiplier deux matrices de tailles différentes. Beaucoup de candidats pensent que  $Q^n$  est composée des éléments de  $Q$  pris individuellement à la puissance  $n$ . Ils n'ont pas remarqué que si 1 était valeur propre de  $Q$  alors tel en était également le cas pour  $Q^n$ .
- Tout le sel du modèle markovien réside dans la dépendance en le passé (même si c'est une dépendance plutôt faible, *via* le rang précédent). Certains candidats ont pensé qu'on pouvait alors dire que  $X_{n+k}$  était indépendant de  $X_n$  pour  $k \geq 2$ .
- Les suites récurrentes de la question 5 ont été remarquablement mal traitées et le système de la question 4b mal résolu, révélant une vraie difficulté à faire du calcul "abstrait". Par ailleurs les cas limites (ceux, par exemple, où  $p_0$  et  $p_1$  sont tous deux nuls) sont quasi-systématiquement passés sous silence, alors que l'on demandait évidemment une réponse dans tous les cas, comme le suggérait la fin de l'énoncé de la question 4b.
- Notons enfin une faute vraiment intrigante. Beaucoup de candidats pensent qu'un estimateur est toujours asymptotiquement sans biais et que la réponse à la question 7a provient de la définition même d'un estimateur. Rappelons qu'un estimateur est simplement "une fonction (mesurable) des observations". D'autres appliquent la loi des grands nombres en prétextant à tort l'indépendance des observations. La question 7d découlait directement de la question 7c, grâce à l'inégalité de Tchebychev, qui semble ignorée par trop de candidats.

*Problème II.* Le problème II servait à montrer diverses inégalités fonctionnelles de type Cauchy-Schwarz. C'était principalement de l'analyse, mêlée à quelques résultats sur les polynômes. Son caractère plutôt abstrait en a rebuté plus d'un.

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz ayant souvent été vue en cours, les candidats ont essayé de se souvenir de sa démonstration – ce qui a conduit à certaines approximations ou fautes dans le raisonnement. Il faut noter que Schwarz s'écrit sans 't'.
- La question 2 a été trop peu traitée par les candidats ayant réussi la question 1, alors que la méthodologie mise en œuvre est la même. Cela traduit sans doute une compréhension plutôt superficielle de la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On notera, à la question 2a, que nombre de candidats ont montré que  $h$  était négative en arguant à tort qu'une somme de trois termes, dont deux positifs, est nécessairement du signe du troisième. La question 2d était là uniquement pour indiquer la bonne condition nécessaire et suffisante. Nonobstant ceci, aucun candidat n'est allé au-delà de la démonstration que  $f$  et  $g$  sont proportionnelles, ce qui traduit une mauvaise compréhension de l'énoncé et un manque de recul par rapport aux objectifs d'un ensemble de questions (*cf.* également les commentaires à propos des préliminaires du problème I).
- La question 3a a été bien comprise, même si des réponses laconiques comme " $\alpha = 2$ " ne sont pas suffisantes. L'étude de fonction de la question 3b a été mal traitée, elle aussi, et a encore donné lieu à des calculs de dérivées fantaisistes.