Concours interne de recrutement d'administrateurs de l'Insee

EPREUVES ECRITES

Insee
Mesurer pour comprendre
Direction générale

CONCOURS INTERNE 2016
POUR LE RECRUTEMENT D'ADMINISTRATEURS STAGIAIRES DE L'INSEE

COMPOSITION D'ÉCONOMIE et SCIENCES SOCIALES

(durée : 4 heures)

Cette composition comporte deux parties :

- la première porte sur les sciences sociales.
- la seconde porte sur l'économie.

Chacune des deux parties sera notée séparément et comptera pour la moitié de la note finale.
Vous composerez pour chacune de ces deux parties sur <u>une copie séparée</u>.

18 bd Adolphe Pinard - 75675 PARIS CEDEX 14 - FRANCE - www.insee.fr
Tél. standard : 01.41.17.50.50 - N° SIRET : 120 027 016 00019 - Code APE : 84.11Z - Service Insee Contact : 09 72 72 4000 - (tarification "appel local")

PARTIE 1 : SCIENCES SOCIALES

« La mobilité sociale est-elle toujours un outil pertinent pour analyser la société française ? »

PARTIE 2 : ÉCONOMIE

« Faut-il favoriser l'investissement ou la consommation pour créer de la croissance ? »

Insee
Mesurer pour comprendre
Direction générale

CONCOURS INTERNE 2016
POUR LE RECRUTEMENT D'ADMINISTRATEURS STAGIAIRES DE L'INSEE

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES et STATISTIQUES

(durée : 4 heures)

Cette composition comporte 5 pages :

L'épreuve est constituée de deux parties distinctes, chacune comptant pour moitié dans la note finale.

Les quatre exercices sont indépendants et sont tous à traiter.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Vous composerez pour chacune de ces deux parties sur une copie séparée.

18 bd Adolphe Pinard - 75675 PARIS CEDEX 14 - FRANCE - www.insee.fr
Tél. standard : 01.41.17.50.50 - N° SIRET : 120 027 016 00019 - Code APE : 84.11Z - Service Insee Contact : 09 72 72 4000 - (tarification "appel local")

Partie 1 : Analyse-algèbre

Exercice 1

1. On considère un réel γ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n n^\gamma.$$

   (a) En effectuant un développement asymptotique en puissances de $\frac{1}{n}$, établir, lorsque n tend vers $+\infty$, la relation suivante :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma}{2}\right)\frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   (b) Montrer qu'il existe une seule valeur de γ que l'on précisera, pour laquelle la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est convergente.

   (c) En déduire que, pour cette valeur de γ, la suite (u_n) possède, quand n tend vers $+\infty$, une limite finie A , strictement positive.
   On admettra que $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

2. On considère la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt.$$

   (a) Vérifier que la fonction F_n est bien définie.

   (b) On suppose que x est strictement positif et on considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre x.
   Établir l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}([X \leqslant n]) = F_n(x).$$

   (c) Que vaut $F_n(0)$?

3. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels et tout entier naturel n non nul, on pose :

$$\Delta_n(p, q) = F_n(n - p\sqrt{n}) - F_n(n + q\sqrt{n}).$$

   (a) En utilisant les résultats de la question 1, établir le résultat suivant :

$$\Delta_n(p, q) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-p}^{q}\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}}du.$$

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}}$.

4. On définit, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et $u > -\sqrt{n}$, les fonctions h_n par :

$$e^{-\frac{u^2}{2}} - \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} = [1 - e^{h_n(u)}]e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est croissante.

   (b) Établir que, pour tout réel u, $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(u) = 0$.

   (c) Montrer que la suite (h_n) converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

5. (a) En utilisant les résultats de la question 4, établir le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-p}^{q}\left[e^{-\frac{u^2}{2}} - \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}}\right]du = 0.$$

   (b) En déduire, sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer explicitement, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\Delta_n(p, q)$.

6. On pose, pour tout entier naturel n non nul : $\alpha_n = 1 - F_n(n)$.

   (a) Montrer que : $\alpha_n \leqslant 1 - \Delta_n(0, q)$.

   (b) Montrer que, pour $n \geqslant q^2$: $\alpha_n \geqslant \Delta_n(q, 0)$.

   (c) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.

   On rappelle qu'une densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite est $u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Exercice 2

Notations

Pour toutes matrices colonnes C et D de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, d'éléments respectifs c_i et d_i, on note :

$\langle C, D\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i$ le produit scalaire canonique et $\|C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$ la norme euclidienne associée.

De même, pour toutes matrices lignes L et M de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, d'éléments respectifs ℓ_i et m_i, on note :

$$\langle L, M\rangle = \sum_{i=1}^{n} \ell_i m_i \text{ et } \|L\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \ell_i^2}.$$

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j}$, on pose $\sigma(A) = \operatorname{tr}(A \times {}^t A)$, où, pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(M)$ désigne la trace de M et ${}^tM$ sa transposée.

1. Montrer que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont la même trace.
2. Exprimer $\sigma(A)$ en fonction des éléments de A.
3. *On rappelle qu'une matrice U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si U est inversible et si U vérifie $U^{-1} = {}^t U$.*
   Montrer, pour toute matrice U orthogonale et toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la relation suivante :
   $$\sigma(U^{-1}AU) = \sigma(A).$$

La suite de cet exercice consiste à étudier une réciproque de la propriété précédente. On considère donc une matrice ***inversible*** *S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de terme général $s_{i,j}$, telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \sigma(S^{-1}AS) = \sigma(A).$$

4. Montrer que, pour toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\sigma(BS) = \sigma(SB)$.
5. On suppose que B est la matrice $E_{p,q}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la matrice dont l'élément situé à l'intersection de la p-*ième* ligne et de la q-*ième* colonne vaut 1, tous les autres termes valant 0.
   Que devient alors la relation de la question 4 ?
6. On note C_p le p-*ième* vecteur-colonne de S, c'est-à-dire la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'éléments $s_{i,p}$, $i \in [\![1,n]\!]$ et L_q le q-*ième* vecteur-ligne de S, c'est-à-dire la matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ d'éléments $s_{q,j}$, $j \in [\![1,n]\!]$.
   (a) Établir, pour tout couple (p,q) de $[\![1,n]\!]^2$, l'égalité suivante :
   $$\|C_p\| = \|L_q\|.$$
   (b) On note λ la valeur commune des normes de la question précédente. Montrer que λ est non nulle.
7. On prend maintenant pour B la matrice B_p dont la p-*ième* colonne est ${}^tL_p$ et dont tous les autres éléments sont nuls.
   Montrer que la relation obtenue à la question 4 devient :
   $$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} s_{i,j}s_{p,j}\right)^2 = \lambda^4.$$
8. Déduire de la question 7 que :
   $$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} \langle L_i, L_p\rangle^2 = 0,$$
   puis que :
   $$\forall (i,p) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq p \Rightarrow \langle L_i, L_p\rangle = 0.$$
9. En déduire que la matrice $U = \frac{1}{\lambda}S$ est orthogonale.

Partie 2 : Probabilités-statistiques

Exercice 3

Soient a un réel strictement positif et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, a]$. On considère les deux variables aléatoires Z et T définies par :

$$Z = \max(X, a - X) \text{ et } T = \min(X, a - X).$$

1. Déterminer la loi de Z.
2. Déterminer la loi de T.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(Z, T)$.
4. Déterminer une densité de $D = Z - T$.
5. On définit la variable Q par $Q = \dfrac{T}{Z}$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Q.
   (b) Vérifier que Q est une variable à densité.
6. On considère la variable aléatoire W définie par $W = ZT$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de W.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(W)$.

Exercice 4

On considère une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, une densité de la variable S_n est la fonction h_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Soient θ un réel strictement positif et f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Vérifier que f est une densité de probabilité.
   On note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

   (b) Donner la fonction de répartition de X.

   (c) Déterminer la loi de la variable $Y = \theta X^2$.

   (d) Soit $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que Y.
   Déterminer une densité de la variable Z_n définie par : $Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

3. On désire estimer le paramètre θ.
À cet effet, on considère un échantillon de n variables aléatoires $X_1, \ldots X_n$ indépendantes, admettant toutes f comme densité.
On pose :

$$\theta_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}.$$

   (a) Calculer $\mathbb{E}(\theta_n)$.

   (b) Calculer $\mathbb{E}(\theta_n^2)$.

4. (a) Construire, à partir de θ_n, un estimateur $\hat{\theta}_n$ sans biais de θ.

   (b) Calculer $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)$.

   (c) Montrer que $\hat{\theta}_n$ converge en probabilité vers θ.