MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ORAL

Sylvain Arlot, Aurélien Garivier

Coefficient : 2

Durée de préparation : 1 heure

Durée de passage devant le jury : 30 minutes

Sujet : 2 exercices (le candidat n'a pas le choix de la planche mais peut traiter les exercices et les exposer dans l'ordre qu'il souhaite)

Préparation : L'usage de la calculatrice ou de tout autre document est interdit

Commentaires généraux

Cette année encore, le jury est dans l'ensemble très satisfait des prestations qu'il a pu voir, comme en témoignent la moyenne et la médiane élevées des notes, toutes deux à 11/20. Ce constat positif cache une fois à nouveau des disparités criantes : les notes s'étalent entre 0.5 et 20, et l'écart-type est de 4.4. Si les meilleurs candidats ont fait preuve de recul et même d'un certain brio, les plus faibles se sont trouvés fort dépourvus face à des exercices qui, bien que traités de façon satisfaisante par la majorité des candidats, ne leur laissaient manifestement aucune chance ; le jury regrette d'avoir dû mettre des notes très faibles, dont une inhabituellement basse, pour des prestations qui n'étaient pas au niveau du concours. Entre ces deux extrêmes, on avait cette année plus qu'à l'habitude un groupe d'étudiants plutôt bons, qui ont plus ou moins réussi leur oral (selon, parfois, leur attitude et/ou leur goût pour le sujet tiré) que le jury s'est appliqué à classer sans forcer les écarts.

Dans l'esprit du jury, une prestation satisfaisante obtient la moyenne : une note inférieure vient sanctionner des manquements au cours ou des maladresses. En dessous de 7/20, ces deux défauts sont réunis. Les notes inférieures à 5/20 sont réservées aux prestations les plus décevantes, qui n'ont guère présenté d'aspect positif. À l'inverse, une prestation notée 16/20 ou plus a été jugée brillante ; à partir de 13/20, le candidat a fait preuve d'une vraie maîtrise et a su répondre de façon autonome à une partie significative des problèmes qui lui étaient posés.

Suivant ces repères, les notes se répartissent ainsi : 4 notes inférieures ou égales à 5/20, 7 notes entre 6/20 et 7/20, 14 notes entre 8/20 et 9/20, 10 notes entre 10/20 et 12/20, 12 notes entre 13/20 et 15/20, 10 notes supérieures ou égales à 16/20.

À propos des exercices. Nous avons comme les années précédentes balayé l'ensemble du programme, en testant pour chaque candidat un maximum de compétences. Comme l'an dernier, et sauf exception, le premier candidat de chaque série tirait sa planche au hasard parmi celles qui n'avaient pas encore été distribuées. Celle-ci était traitée par trois ou quatre candidats successifs. Vingt planches étaient disponibles au tirage, et dix-huit ont été utilisées. Chacune contenait deux exercices portant sur des aspects complètement différents du programme, et dans la mesure du possible chacune contenait un exercice assez "classique" couplé à un exercice potentiellement plus déstabilisant. L'intégralité des planches tirées par les candidats sont publiées et commentées ci-dessous.

Le jury a pris soin de ne pas proposer d'exercice qui soit trop difficile pour les candidats : nous avons d'ailleurs pu apprécier de voir les candidats en venir assez souvent à bout. La première question de chaque exercice est en général très simple, et permet au candidat de prendre confiance ; à l'inverse, la dernière est souvent un peu délicate. Nous avons bien entendu conscience des petits écarts qui demeurent inévitablement entre les différentes planches (sujet plus ou moins central dans le programme, raisonnement plus ou moins classique ou subtil à mettre en oeuvre, etc.), et il en est évidemment tenu compte dans la notation. Nous rappelons l'importance primordiale de l'interaction avec le jury : même les candidats qui n'ont pas réussi grand-chose pendant leur préparation peuvent avoir une note correcte s'ils réagissent bien aux questions et aux suggestions du jury. Certains candidats arrivent particulièrement nerveux à l'épreuve, redoutant de tomber sur un thème qu'ils apprécient moins ou sur une planche plus difficile que la moyenne. Nous voulons insister ici sur le fait qu'ils sur-évaluent très largement l'importance de ces contingences sur leur note finale : bien au delà de l'exercice, qui ne sert que de prétexte, le jury peut pendant l'interrogation se faire une idée assez fiable du niveau d'un candidat, et si tout "aléa du concours" ne peut bien sûr être éliminé, il apparaît quand même qu'un bon candidat sortira toujours avec une bonne note (sauf peut-être en cas de stress excessif ou d'un manque de dynamisme manifeste), et qu'un mauvais candidat n'arrivera pas à faire illusion. Par conséquent, le jury invite les candidats à se présenter sous leur meilleur jour, mais sans fard : l'épreuve vient sanctionner tout un travail de préparation au concours qu'ils ont mené depuis bien longtemps ; le jour de l'épreuve, ils n'ont rien de mieux à faire que de montrer en toute honnêteté ce dont ils sont capables.

La nouvelle forme de l'épreuve. Après une session de transition, où elle était optionnelle, la nouvelle formule d'oral entrait cette année en vigueur. Rappelons en quoi elle consiste : pendant une dizaine de minutes *au maximum*, les candidats sont invités à présenter de façon synthétique les résultats qu'ils ont obtenu pendant leur préparation sans intervention du jury. Ensuite, l'interrogation se poursuit selon le mode en vigueur les années précédentes, le jury choisissant les questions qu'il souhaite aborder, en donnant des indications au candidat lorsque c'est nécessaire. Nous sommes, pour l'essentiel, très satisfait par cette évolution, à laquelle nous constatons que les candidats ont été bien préparés. Afin d'en améliorer encore le déroulement pour les sessions à venir, soulignons quelques progrès qui demeurent possibles dans le détail.

D'abord, les candidats peuvent prendre moins de dix minutes s'ils ont fait peu de choses pendant la préparation : il ne leur en sera pas tenu rigueur ; de toute façon, le jury se rendra bien compte de ce qui a été préparé ou non, et il préfère ne pas perdre son temps à voir détaillés des calculs triviaux qui ne rapportent que très peu de points aux candidats : ceux-ci ont intérêt à garder un maximum de temps pour avancer avec les conseils du jury.

À l'inverse, les candidats ne doivent en aucun cas prendre plus de dix minutes pour leur exposé : bien qu'ayant observé une certaine tolérance cette année, le jury est amené à interrompre l'exposé à la fois pour l'équité des candidats et, surtout, dans l'intérêt même de celui qui tarde à conclure, car il réduit inutilement ses opportunités de profiter de l'interaction avec le jury pour avancer dans les exercices. Même si un candidat a beaucoup de choses à présenter, il est nécessaire qu'il fasse un choix dans les détails qu'il donne (le jury lui demandera éventuellement des précisions). Certains, cette année, semblaient un peu jouer la montre ou, à tout le moins, se montraient incapables de gérer leur temps.

Pour commencer leur exposé, il n'est pas inutile que les candidats annoncent les questions qu'ils ont traitées. Par ailleurs, le niveau de détail donné n'est pas toujours le bon : il est inopportun de détailler tous ses calculs (la distributivité et la commutativité de la multiplication et de l'addition dans $\mathbb{R}$ ne nécessitent pas qu'on leur consacre beaucoup de temps). Il faut par contre donner une idée au jury de la manière dont les résultats ont été

obtenus : idéalement, le candidat en dit juste assez pour convaincre le jury qu'il a suivi un raisonnement valide, et donne le cas échéant le résultat auquel il est parvenu.

Enfin, la gestion du tableau a posé problème à une petite dizaine de candidats. En principe, il n'est pas nécessaire d'effacer le tableau au cours de l'exposé initial. Un demi-tableau par exercice suffit amplement. Ce ne sont d'ailleurs pas les candidats qui ont traité l'intégralité de leur planche pendant leur préparation qui manquent de place, mais plutôt ceux qui croient bon de détailler à l'excès leurs calculs.

Conseils aux candidats. Nous invitons les candidats à consulter les rapports des années précédentes, qui contiennent un certain nombre de conseils qui demeurent bien entendu pertinents et qu'il serait inutile de reprendre ici : nous soulignerons donc seulement quelques points particulièrement frappants cette année, à l'attention desquels nous souhaitons rappeler les futurs admissibles.

- Encore une fois, insistons sur le fait qu'il ne faut pas recopier ni même répéter l'énoncé de l'exercice, que le jury a sous les yeux.
- Il est inutile de donner tous les détails de la réflexion qui a mené le candidat à la solution, sous forme d'"analyse-synthèse" : il est préférable de présenter cette dernière directement, en présentant un raisonnement sous forme déductive.
- Le manque de dynamisme de certains candidats était particulièrement frappant cette année. Il est toujours dommage de voir des candidats soupirer quand on leur demande de se lancer dans un calcul. Un candidat qui manifeste la volonté d'avancer au maximum laisse une bien meilleure impression que s'il n'attend que le moment où il pourra sortir.
- Dans le même esprit, certains candidats cherchent manifestement à être guidés pas à pas pour la résolution des exercices. Bien entendu, le jury se refuse à dicter les solutions sous forme à peine cachée, car cet exercice est très peu valorisé au moment de la notation.
- Certains exercices ont permis de mettre en évidence de façon criante des problèmes de logique élémentaire ne relevant pas à proprement parler des mathématiques, mais évidemment fort gênants pour la résolution des questions un peu subtiles. Voici un exemple qui est revenu plusieurs fois sous des formes différentes : la proposition "pour tout i, la propriété P_i ou la propriété Q_i est vraie" est très différente de la proposition "P_i est vraie pour tout i, ou Q_i est vraie pour tout i".
- À titre plus anecdotique, il est important de simplifier les résultats obtenus de manière à présenter comme conclusion une expression raisonnablement simple : quand on aboutit par exemple à $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$, on est prié de remarquer qu'il s'agit en fait de $2^n - 1$ (qu'il est quand même dommage d'écrire sous la forme $-(1 - 2^n)$, comme cela s'est vu).
- Enfin, il reste regrettable que les candidats ne connaissent toujours pas l'alphabet grec ; que l'on confonde un zeta avec un xsi, personne n'en tiendra rigueur. Mais que, pendant tout l'exposé, on mélange alpha avec lambda et theta avec sigma, cela risque d'engendrer des malentendus à tout moment, faisant notamment perdre un temps précieux au candidat.

1. Quelques commentaires sur chaque planche

Planche 1:

Exercice 1: La première question est élémentaire, la seconde nécessite un peu plus d'attention pour bien gérer les signes, et la troisième est plus délicate.

Le jury a apprécié le fait que tous les candidats maîtrisaient bien le théorème des extrema liés.

Exercice 2: Les deux premières questions, élémentaires, ont été très bien réussies. La troisième permettait de tester la notion statistique d'estimateur dans un cadre un peu moins habituel que les moyennes empiriques : le jury a pu constater que les candidats ne savent pas tous ce qu'est un estimateur, ni quelles qualités il peut avoir (ou pas).

Planche 2:

Exercice 1: La récurrence de la deuxième question nécessite d'être soigneux. Dans la troisième question, les candidats pensent assez naturellement à la formule $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, mais peinent à majorer le reste de cette série.

Exercice 2: La question 2 permet de savoir si les candidats connaissent vraiment la formule des probabilités totales. La première partie de la troisième est un peu délicate, ensuite il fallait résoudre un système 2×2 (ce qui a été facile pour tous les candidats). Pour la dernière question, les candidats n'ont pas de bonne intuition sur la réponse. Pour la résoudre il faut refaire l'étude des questions 2-3 avec d'autres paramètres.

Planche 3:

Exercice 1: Il s'agit d'un exercice d'analyse élémentaire classique (dérivées et primitives). Les candidats passés sur cette planche ont trahi une méconnaissance totale des fonctions trigonométriques élémentaires (pas seulement arctan, mais même sin et cos, dont ils ne connaissaient aucune valeur remarquable). Un seul candidat sur quatre peut dessiner le graphe de tan ou de arctan ! On a également regretté de grosses difficultés sur les calculs d'équivalents, et même pour trouver les limites aux bornes de $(2-x)/(2+x)$ pour deux candidats.

Exercice 2: Un exercice de modélisation plus informel qui nécessitait d'écrire un peu attentivement les choses : il n'a guère été entamé par les candidats.

Planche 4:

Exercice 1: La première question se réduit à une bien classique étude de fonctions. Trouver l'équivalent dans la deuxième question nécessite une comparaison série-intégrale. La réponse à la troisième question découle facilement de l'encadrement obtenu à la question 2, ou d'une discussion un peu plus attentive si l'on admet juste son résultat. Attention toutefois à ne pas prendre l'exponentielle de l'équivalent !

Exercice 2: Cet exercice testait la connaissance de la loi des grands nombres (bien connue) et du théorème de la limite centrée (mal connu). Le calcul de $\mathbb{E}[|X|]$, pour une variable X gaussienne centrée réduite, pose de gros problèmes.

Planche 5:

Planche remarquablement réussie par les 3 candidats (il est vrai plutôt brillants).

Exercice 1: Exercice assez abstrait, dans lequel $T \circ S = \mathrm{id}$ mais $S \circ T \neq \mathrm{id}$. La condition suffisante dans la question 2 nécessitait un peu d'initiative pour choisir les bonnes fonctions test (que la question 1 pouvait suggérer).

Exercice 2: Exercice facile, mais il fallait s'appliquer à le présenter proprement.

Planche 7:

Couplage d'un exercice plutôt classique et formel avec un exercice nécessitant des notions de statistiques.

Exercice 1: Les fractions continues servent ici de prétexte pour un exercice sur les suites et les récurrences. Dans la première question, la deuxième égalité a posé un peu plus de problèmes.

Exercice 2: La première question, qui se ramène vite à un problème d'étude de fonction, ne pose pas de difficulté. Par contre, la seconde nécessite de raisonner en statisticien : un des candidats n'a jamais entendu parler d'intervalle de confiance. Les autres ne font pas preuve d'une grande aise.

Planche 8:

Trois très bons candidats sont presque venus à bout de cette planche.

Exercice 1: La comparaison série-intégrale est très bien maîtrisée par deux des candidats. La formule de Taylor-Lagrange, qu'on se proposait de démontrer pour les besoins de l'exercice, est connue des candidats (bien que cette connaissance ne soit pas exigible de leur part). La fonction arctan était ici très bien connue.

Exercice 2: Exercice plutôt facile autour de la loi et des séries géométriques, qui n'a pas posé de grosse difficulté aux candidats.

Planche 9:

Exercice 1: Les deux premières questions contenaient des calculs de probabilités très classiques. Dans la deuxième, il est pratique de connaître la formule $\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 P(Y \geqslant t)dt$, voire aussi $\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 2tP(Y \geqslant t)dt$.

Exercice 2: Un candidat ne connait pas du tout les extrema liés. Seule la justification qu'il s'agit bien d'un minimum global est un peu plus délicate. De bons candidats auraient pu penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Planche 10:

Exercice 1: Il était important de bien modéliser le problème, qui était présenté de façon informelle : soient T_1, T_2, T_3 les notes obtenues par les clichés successifs, on prend

$$P = 5 \times \mathbb{I}_{\{T_1=5\}\cup\{T_2=5\}} + T_3\mathbb{I}_{\{T_1\neq 5\}\cap\{T_2\neq 5\}} \ ,$$

etc. Dans la question 2, il fallait bien comprendre que l'objectif est de maximiser l'espérance de la note de la photo que l'on garde, et non pas la probabilité d'avoir gardé la photo de meilleure note.

Exercice 2: Exercice plus abstrait et formel. Il faut être très rigoureux : il n'y a plus de difficulté dès lors que l'on comprend bien les objets que l'on manipule.

Planche 11:

Exercice 1: Le mot "unitaire" a posé quelques problèmes de compréhension, qui ont gêné la préparation de certains candidats. Le jury n'en a bien sûr pas tenu rigueur aux candidats ! Par contre, il était très décevant de voir que les racines complexes d'un polynôme réel de degré deux sont si mal connues. La principale difficulté des candidats était d'ordre logique : ils n'arrivaient pas à interpréter correctement l'implication, et ne voyaient pas comment l'utiliser dans la question 2.

Exercice 2: Les candidats se sont montrés très mal à l'aise avec la notion d'estimateur (qui n'est pas toujours une moyenne empirique !). Un candidat ne savait pas manipuler les variables continues, et n'avait aucune notion de statistiques.

Planche 12:

Un planche assez classique qui, encore une fois, a posé des problèmes de logique.

Exercice 1: La question 1 a été, heureusement, bien réussie. Dans la suivante, les candidats peinent à utiliser l'indication et à répondre à la question posée. La question 3 nécessite un peu plus d'initiative, bien qu'elle soit sans grande difficulté.

Exercice 2: La première question, très classique, a été très bien réussie. La suite a suffi à déstabiliser les candidats, alors qu'une discussion simple mais rigoureuse permettait aisément de répondre.

Planche 13:

Exercice 1: La première question n'était pas inconnue des candidats ; certains distinguaient les cas des variables discrètes et continues : c'est possible, mais il faut savoir traiter les deux. Dans la suite, développer la puissance quatrième d'une somme pose un petit problème combinatoire aux candidats, qui semblent bien maîtriser la formule du binôme de Newton.

Exercice 2: Exercice élémentaire permettant de bien tester les candidats sur l'algèbre linéaire de base.

Planche 14:

Exercice 1: Les questions 1 à 4 sont très élémentaires, et nécessitent de petites manipulations d'algèbre linéaire. La question 5 demande un raisonnement plus fin.

Exercice 2: La question 3 n'a été réussie par aucun candidat parce qu'ils ne semblent pas vraiment comprendre que l'événement $\{X_1 + \cdots + X_n > nq\}$ est la réunion des événements $\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}$ pour tous les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n > nq$. À la question 4, tous les candidats pensent à la loi des grands nombres, mais pas au théorème de la limite centrée.

Planche 15:

Exercice 1: Cet exercice permettait de tester la maîtrise des polynômes en général, les racines d'un trinôme, et les nombres complexes (avec racines n-ièmes de l'unité). Le jury a été assez déçu par la maîtrise de ces notions.

Exercice 2: Un candidat ne connait pas du tout la covariance. La question 2 est un bon test des connaissances élémentaires sur les inégalités en probabilités. Pour la question 3, il est bon de reconnaître que l'on demande d'admettre que Σ est diagonalisable.

Planche 16:

Exercice 1: Cet exercice permettait de tester sur les statistiques élémentaires et l'optimisation. Même la minimisation d'un trinôme ne va pas de soi pour tout le monde. Connaître la décomposition biais-variance du risque pouvait aider.

Exercice 2: Les récurrences linéaires sont bien connues, mais la combinatoire est très mal réussie. Pour la question 3, les candidats n'arrivaient pas à justifier que la série converge pour x "assez petit".

Planche 17:

Exercice 1: C'est un exercice très classique : le jury a été déçu dans l'ensemble de voir que la notion de continuité en particulier n'est pas vraiment maîtrisée. Concernant l'optimisation et les points critiques, par contre, les candidats étaient assez à l'aise. Cependant, la résolution exacte du système obtenu nécessite un minimum d'attention logique pas toujours présent. La fonction étudiée ici est un contre-exemple très classique montrant la nécessité des hypothèses dans le théorème de Schwarz.

Exercice 2: Un candidat ne semble pas du tout maîtriser les variables aléatoires continues et écrit des sommes discrètes pour les espérances. Pour la deuxième question, les candidats doivent pouvoir s'approprier des notions qu'ils n'ont pas vues en cours (comme la définition de l'espérance d'une matrice aléatoire) quand elles sont définies précisément dans l'énoncé. À la question 3, il était attendu que les candidats identifient que ${}^t mm$ est une matrice de rang 1, ce qui mène aisément à sa diagonalisation.

Planche 18:

Planche plutôt facile, bien réussie par de bons candidats.

Exercice 1: Exercice très classique, que les candidats ont bien su résoudre.

Exercice 2: Certains candidats faisaient un choix étrange de notations, comme $M_{i,j}$ pour les coefficients de P... Cet exercice ne contient pas de question vraiment difficile, mais nécessite de procéder avec rigueur et logique. La première question, élementaire, est là seulement pour suggérer une formule pour $\mathrm{Tr}({}^tPP)$. On a pu constater, comme dans d'autres planches, que des problèmes logiques se posent vite en présence de quantificateurs et d'opérateurs logiques : $[\forall i, P_i \cup Q_i]$ n'est pas équivalent à $[\forall i, P_i] \cup [\forall i, Q_i]$.

Planche 20:

Exercice 1: Cet exercice permettait de tester sur l'analyse élémentaire des fonctions réelles (dérivabilité, développements limités), puis de plusieurs variables. Certains candidats ont un peu de mal à reconnaître l'équation de la tangente à une courbe.

Exercice 2: Cet exercice nécessitait un minimum de connaissance en algèbre linéaire, et permettait de tester les candidats sur les probabilités discrètes. À la fin de l'exercice, on a un petit problème d'optimisation à résoudre.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on note $\|X\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \sqrt{{}^tXX}$.
On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels.
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit

$$N(M) = \sup \left\{ \|MX\| \ ; \ X \in \mathbb{R}^2 \, , \, \|X\| = 1 \right\} \quad .$$

Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On propose de calculer $N(M_r)$ pour $r \neq 0$.

(1) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de M_r. La matrice M_r est-elle diagonalisable?

(2) Montrer que

$$N(M_r)^2 = \sup_{y_1+y_2=1 \, , \, y_1,y_2 \in [0,1]} \{ F_r(y_1, y_2) \}$$

où $\forall y_1, y_2 \in [0,1]$, $\forall r \neq 0$, $F_r(y_1, y_2) = 1 + r^2 y_2 + 2|r|\sqrt{y_1 y_2}$.

(3) En déduire que

$$N(M_r) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{r^2 + 4} + |r| \right)$$

à l'aide du théorème des extrema liés.

Alice et Bertrand sont chargés de relire séparément un mémoire, afin d'en corriger les fautes d'orthographe. On suppose qu'il y a n fautes dans le mémoire, qu'Alice détecte chaque faute (indépendamment des autres) avec probabilité $p \in]0,1[$ et que Bertrand détecte chaque faute (indépendamment des autres) avec probabilité $q \in]0,1[$. On note M le nombre de fautes détectées par Alice, N le nombre de fautes détectées par Bertrand et P le nombre de fautes qu'ils ont tous les deux détectées.

(1) Dans les questions 1 et 2, on suppose que n est connu. Donner la loi, l'espérance et la variance de P.

(2) Proposer des estimateurs sans biais pour p et pour q. Montrer que MN/n^2 et P/n sont deux estimateurs sans biais de pq.

(3) On suppose désormais que n est inconnu. Comment estimer n à partir de M, N et P? Si Alice a repéré 20 fautes et si Bertrand en a vu 15 (dont 10 qu'Alice avait déjà vues), à combien peut-on estimer le nombre de fautes qui restent après leurs corrections?

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme réel

$$Q_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{X^j}{j!} \ .$$

(1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $Q'_{n+1}(X) = Q_n(X)$ et

$$Q_n(X) = Q'_n(X) + \frac{X^n}{n!} \ .$$

(2) Déterminer les variations de la fonction réelle $x \mapsto Q_n(x)$, en fonction de la parité de n, et montrer que Q_n admet au plus une racine réelle.

(3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|Q_n(x) - \exp(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp|x| \ .$$

(4) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note a_{2n+1} la racine de $Q_{2n+1}(X)$. Déterminer (si elle existe) la limite de la suite $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Audrey lance un dé (non pipé) autant de fois que nécessaire pour obtenir successivement un 1, puis un 6. On note $X_1, X_2, \ldots$ les variables aléatoires modélisant les résultats des lancers d'Audrey.

(1) Quelle est la loi du couple (X_1, X_2) ?

(2) On définit la suite de variables aléatoires $Y_0, Y_1, \ldots$ de la façon suivante: pour tout entier t positif ou nul,

$$Y_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geqslant 2, X_{t-1} = 1 \text{ et si } X_t = 6; \\ 2 & \text{si } t \geqslant 1, X_t = 1; \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer: $\forall t \geqslant 0, \mathbb{P}(Y_{t+1} = j | Y_t = i) = M_{i,j}$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

(3) On note x le nombre moyen de lancers nécessaires à Audrey pour obtenir lors de deux lancers successifs sa combinaison (1,6). Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que le couple (x, y) satisfait l'équation suivante:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}y \\ y = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y \end{cases}$$

En déduire la valeur de x.

(4) Audrey joue contre Bertrand: elle a choisi la combinaison (1,6) alors que Bertrand a choisi la combinaison (3,3). L'un des deux gagnera-t-il plus vite que l'autre?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2-x}{2+x}\right) \quad .$$

(1) Quel est le domaine de définition naturel de f ? Montrer que f est continue sur ce domaine.

(2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine.

(3) Montrer que f est dérivable sur son domaine et calculer sa dérivée.

(4) En déduire une formule simplifiée pour f .

On considère une langue imaginaire, possédant l'alphabet $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$ à $n = 26$ lettres, dans laquelle chaque mot est formé selon les règles suivantes:

- la première lettre d'un mot est choisie au hasard uniformément dans A;
- avec probabilité $1 - np$ ($0 < p < 1/n$), le mot est composé de cette seule lettre; avec probabilité np, il contient une deuxième lettre choisie elle aussi au hasard uniformément dans A;
- si le mot contient strictement plus d'une lettre, il en contient exactement deux avec probabilité $1 - np$, et au moins une troisième (choisie également au hasard uniformément dans A) avec probabilité np;
- et ainsi de suite ad infinitum; ainsi toutes les longueurs de mots et tous les mots sont possibles dans cette langue.

Tous les mots de la langue sont classés par ordre de probabilités décroissantes (les cas d'égalité étant résolus arbitrairement). Pour tout entier positif i, on note q_i la probabilité du i-ème mot le plus probable de cette langue.

(1) Calculer la probabilité que le mot prononcé soit "bonjour", et justifier que $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = (1 - np)/n$.

(2) Montrer qu'il y a exactement $(n^k - n)/(n - 1)$ mots contenant strictement moins de k lettres. En déduire que pour tout entier i tel que $n^k < (n - 1)i + n \leqslant n^{k+1}$, on a
$$q_i = \frac{p^{k-1}(1 - np)}{n} .$$

(3) Montrer qu'il existe des nombres réels strictement positifs α et β tels que, en posant $D = -\ln(p)/\ln(n) > 0$, on ait pour tout $i \geqslant 1$:
$$\frac{\alpha}{i^D} \leqslant q_i \leqslant \frac{\beta}{i^D} .$$

(4) On considère un mot ω choisi au hasard dans cette langue imaginaire, et on note $I(\omega)$ la variable aléatoire égale à l'entier strictement positif i si ce mot prononcé est le i-ème plus probable de la langue. À quelle condition sur n et p la variable aléatoire I admet-elle une espérance? une variance?

Soit a un nombre réel strictement positif. On définit pour tout entier n strictement positif :

$$P_n = \prod_{t=0}^{n} \frac{a+t}{2a+t} \, .$$

(1) Montrer que pour tout réel $u \in]-1,1[$ on a :

$$\frac{u}{1+u} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u \, .$$

(2) Déterminer, en fonction de a, la nature de la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$. Donner un équivalent de $\ln(P_n)$ quand n tend vers l'infini.

(3) Discuter, en fonction de a , la nature de la série de terme général P_n .

(4) Calculer la valeur de la somme quand $a = 2$.

(5) Dans une urne, on dispose initialement une boule rouge et une boule noire (indiscernables au toucher). On tire ensuite une boule (uniformément): si elle est noire, on arrête; si elle est rouge, on la remplace dans l'urne par deux boules rouges, et on recommence jusqu'à ce que l'on tombe sur la boule noire. Que peut-on dire du nombre moyen de tirages effectués? Et si on était parti avec une urne contenant deux boules rouges et deux boules noires?

Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi normale centrées réduites. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit

$$A_n = |X_1| + \cdots + |X_n| \quad \text{et} \quad B_n = \sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2} \ .$$

(1) Calculer l'espérance et la variance de $|X_1|$.

(2) Montrer que $n^{-1}A_n$ converge vers une limite finie $a > 0$ à préciser.

(3) Trouver une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la suite $u_n^{-1}B_n$ converge vers une limite finie $b > 0$.

(4) Déterminer la loi limite de $n^{-1/2}A_n - a\sqrt{n}$.

Soit λ un nombre réel strictement positif. Pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ on définit $T(f) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par la relation suivante: si $g = T(f)$, alors pour tout entier k positif ou nul :

$$g(k) = \lambda f(k+1) - kf(k) \ .$$

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Pour toute fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, on définit $S(g) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par la relation suivante: si $h = S(g)$ alors $h(0) = 0$ et pour tout entier k positif ou nul on a :

$$h(k) = \frac{\mathbb{E}[g(Y)\mathbb{I}_{\{Y \leqslant k-1\}}]}{\lambda \mathbb{P}(Y = k-1)} \ ,$$

où $\mathbb{I}_{\{Y \leqslant k-1\}}$ est la variable aléatoire égale à 1 sur l'événement $\{Y \leqslant k-1\}$, et à 0 partout ailleurs. Soit Z une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$.

(1) Soit $f_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la fonction égale à 0 partout sauf au point 5, où $f_5(5) = 1$. Déterminer $T(f_5)$, puis calculer $\mathbb{E}[T(f_5)(Z)]$ si Z suit une loi de Poisson de paramètre λ.

(2) Montrer que Z suit une loi de Poisson de paramètre λ si et seulement si toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifie :

$$\mathbb{E}[T(f)(Z)] = 0 \ .$$

(3) Montrer que pour toute fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, on a $T(S(g)) = g$.

(4) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0) = 0$. A-t-on $S(T(f)) = f$?

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par les relations $u_1 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}\ .$$

(1) Montrer que pour tout n on a $u_n \leqslant 2\sqrt{n}$.

(2) En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

(3) Montrer que $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$ quand n tend vers l'infini.

Dans cet exercice, on note $\lfloor r \rfloor$ la partie entière d'un nombre réel r : c'est le plus grand entier inférieur ou égal à r. Soit x_0 un nombre réel strictement compris entre 0 et 1. On définit par récurrence les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(a_n)_{n\geqslant 1}$ par les relations suivantes: $a_n = x_n = 0$ si $x_{n-1} = 0$, et sinon:

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{x_{n-1}} \right\rfloor, \quad x_n = \frac{1}{x_{n-1}} - a_n \ .$$

On définit de plus les suites $(p_n)_{n\geqslant 0}$ et $(q_n)_{n\geqslant 0}$ par les relations:

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \quad \forall n \geqslant 2,\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \ ,$$
$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad \forall n \geqslant 2,\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \ .$$

(1) Montrer que pour tout réel y strictement positif et pour tout entier n strictement positif tel que $a_n \neq 0$ on a :

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ldots + \frac{1}{a_n + x_n}}}} = x_0 \ ,$$

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ldots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{y}}}}} = \frac{y p_n + p_{n-1}}{y q_n + q_{n-1}} \ .$$

En déduire que pour tout entier n strictement positif tel que $a_n \neq 0$ on a :

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ldots + \frac{1}{a_n}}}} = \frac{p_n}{q_n} \ .$$

(2) Montrer pour tout entier n strictement positif tel que $a_n \neq 0$ la relation

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \ ,$$

et en déduire que la fraction p_n/q_n est irréductible.

(3) Montrer que pour tout entier n positif ou nul tel que $a_{2n+1} \neq 0$ on a :

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leqslant x_0 \leqslant \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \ .$$

En déduire que la suite de terme général p_n/q_n converge, et trouver sa limite.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

(1) Montrer :
$$\exp\left(-\frac{np}{1-p}\right) \leqslant P(X=0) \leqslant \exp(-np) \ .$$

(2) En analyse statistique des essais médicaux, une règle appelée "rule of three" s'énonce ainsi: si parmi n tentatives aucune n'est réussie, alors on peut affirmer avec un niveau de confiance 95% que la probabilité de réussite de chaque tentative est inférieure à $3/n$.
Discuter la validité de cette règle.

Pour tout entier n strictement positif, on définit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} \ .$$

(1) Justifier que u_n est une somme de Riemann.

(2) Montrer que u_n converge vers une limite l à identifier.

(3) Montrer qu'il existe une fonction F telle que

$$l - u_n = \sum_{k=1}^{n} \left[F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) \right] \ .$$

(4) Montrer que pour toute fonction g deux fois dérivable sur un intervalle réel $[0, x]$ il existe $c \in [0, x]$ tel que :

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(c)}{2} x^2 \ .$$

On pourra pour cela utiliser la fonction auxiliaire h définie sur $[0, x]$ par la relation

$$h(y) = g(x) - g(y) - g'(y)(x - y) - d(x - y)^2 \ ,$$

où d est choisi tel que $h(0) = 0$.

(5) En déduire un équivalent de $l - u_n$ quand n tend vers l'infini.

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à deux. Trois amis lancent tour à tour un dé à n faces: André commence, puis c'est à Bertrand, puis à Christian, et à nouveau à André, etc. Dès que l'un d'entre eux obtient un 1, il a gagné.

(1) Combien de dés seront lancés en moyenne avant que l'un d'entre eux ne gagne?

(2) Quelle est la probabilité pour chacun d'entre eux de gagner?

(3) Combien de faces doit posséder le dé pour qu'André ait plus de chances de gagner que Bertrand et Christian réunis?

Soit $n \geqslant 1$ un entier et $x \in]0, +\infty[$. On cherche à calculer

$$\inf_{a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R},\, \sum_{i=1}^n a_i > 0} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 + x}{\sum_{i=1}^n a_i} \right\} \quad .$$

(1) Pour tout $\alpha, \beta > 0$, calculer

$$\inf_{t>0} \left\{ \alpha t + \beta t^{-1} \right\} \quad .$$

(2) Montrer que pour tout $c > 0$,

$$\inf_{a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R},\, \sum_{i=1}^n a_i = c} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^2 \right\} = \frac{c^2}{n} \quad .$$

Indication: On pourra utiliser le théorème des extrema liés.

(3) En déduire que pour tout $c > 0$,

$$\inf_{a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R},\, \sum_{i=1}^n a_i = c} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 + x}{\sum_{i=1}^n a_i} \right\} = \frac{c}{n} + \frac{x}{c} \quad .$$

(4) Conclure.

Soit $d, n \geqslant 1$ des entiers.

(1) Soient $U_1, \ldots, U_d$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$ et $X = U_1 \times \cdots \times U_d$. Calculer l'espérance et la variance de X en fonction de d.

(2) Soient $V_1, \ldots, V_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$ et $Y = \min\{V_1, \ldots, V_n\}$.

(a) Pour tout $t \in [0,1]$, calculer $\mathbb{P}(Y \geqslant t)$.

(b) En déduire la valeur de l'espérance de Y en fonction de n.

(c) Calculer la variance de Y.

On souhaite comparer les deux procédés suivants de fragmentation (aléatoire) de l'intervalle $[0,1]$:

(A) on découpe récursivement $[0,1]$ comme suit:
- Étape 1: on choisit un point de coupure $C \sim \mathcal{U}([0,1])$.
- Étape $k \geqslant 2$: chaque fragment obtenu à l'étape $k-1$ est coupé (indépendamment des étapes précédentes et des autres fragments) en un point choisi uniformément à l'intérieur de ce fragment.

(B) on choisit d'un coup les n points de coupure $V_1, \ldots, V_n$, variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$.

(3) Avec la stratégie (A), combien de points de coupure obtient-on après k étapes? On note n_k ce nombre.

(4) On fixe un entier $k \geqslant 1$. On note T_A la taille du fragment contenant 0 obtenu par la stratégie (A) après k étapes, et T_B la taille du fragment contenant 0 obtenu par la stratégie (B) lorsque $n = n_k$. À l'aide des questions (1) et (2), comparer les lois des variables aléatoires T_A et T_B.

Au photomaton, vous cherchez à obtenir la meilleure photo possible. Vous avez droit à trois essais: après le premier, vous pouvez soit accepter le cliché, soit y renoncer et en faire un deuxième. Dans ce cas, vous pourrez à nouveau refuser le deuxième cliché, mais alors vous serez obligé d'accepter le troisième. Dans tous les cas, il est impossible de revenir en arrière: un cliché refusé est définitivement perdu.

Pour guider votre choix, vous évaluez chaque cliché par une note comprise entre 0 (exécrable) et 5 (parfaite). Pour faire simple, on considère que les notes obtenues par les clichés sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(1) On suppose d'abord que vous adoptez une stratégie "perfectionniste" qui consiste à n'accepter le premier ou le deuxième cliché que s'il est noté 5. En moyenne, quelle note aura la photo avec laquelle vous repartirez?

(2) Dans une deuxième stratégie, vous renoncez systématiquement à la première photo. Discuter, en fonction de la note obtenue par le deuxième cliché, l'opportunité d'en faire un troisième pour maximiser l'espérance de la note de la photo avec laquelle vous partirez.

(3) Déterminer la stratégie optimale qui vous permettra de repartir avec la photographie la mieux notée possible en moyenne.

Soit n un entier strictement positif, soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une application f est une *forme linéaire* sur E si c'est une application linéaire définie sur E à valeur réelle. Soit F l'ensemble des formes linéaires sur E.

(1) Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et préciser sa dimension.

(2) Pour toute matrice $B \in E$, on définit l'application ϕ_B définie sur E par:

$$\forall M \in E,\ \phi_B(M) = \mathrm{Tr}(BM)\ .$$

Montrer que $\phi_B \in F$.

(3) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi :\ & E \to F \\ & B \mapsto \phi_B \end{aligned}$$

qui à toute matrice $B \in E$ associe l'application ϕ_B, est une application linéaire.

(4) Montrer que ϕ est bijective.

Un polynôme $P(X)$ à coefficients réels est dit *stable* s'il est de degré supérieur ou égal à 1 et s'il vérifie la condition suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = 0 \implies \mathrm{Re}(z) < 0 \,.$$

(1) Quels sont les polynômes unitaires stables de degré 1? de degré 2?

(2) Soient $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes à coefficients réels de degrés respectifs supérieurs ou égaux à 1. Montrer que $P(X)Q(X)$ est stable si et seulement si $P(X)$ et $Q(X)$ le sont tous les deux.

(3) Soit n un entier non nul et soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme à coefficients réels. Montrer que si $P(X)$ est stable, alors tous ses coefficients sont strictement positifs.

(4) Soit $P(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Montrer que $P(X)$ est stable si et seulement si on a : $a_1 > 0$ et $0 < a_0 < a_1a_2$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier et $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que pour tout i, X_i suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et Y_i suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on observe

$$Z_i = \min\{X_i, Y_i\} \quad ,$$

et l'on souhaite en déduire des informations sur le paramètre λ.

(1) Quelle est la loi de Z_i ? Calculer son espérance, sa variance.

(2) Proposer un estimateur $\widehat{\lambda}_n$ de λ.

(3) L'estimateur $\widehat{\lambda}_n$ est-il consistant? Est-il sans biais?

(4) Proposer un intervalle de confiance pour λ.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on note

$$A(\lambda) = A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ \lambda_1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice "anti-diagonale" associée à λ.

(1) On considère, dans cette question seulement, le cas $n = 2$. La matrice $A(1, 1)$ est-elle inversible? Déterminer ses valeurs propres, et la diagonaliser si c'est possible.

(2) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$, calculer le produit $A(\lambda)A(\mu)$. En déduire l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tels que $A(\lambda)$ est inversible.

(3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, déterminer l'ensemble des valeurs propres de $A(\lambda)$, et la diagonaliser lorsque c'est possible.

(1) Soit n un entier naturel non-nul et $P(X)$ polynôme réel de degré n possédant n racines réelles distinctes. Montrer que $P'(X)$ admet exactement $n-1$ racines réelles distinctes.

(2) Soit $n \geqslant k \geqslant 1$ deux entiers naturels. On considère le polynôme de degré n défini par $P(X) = X^k(X-1)(X-2)\dots(X-(n-k))$. Déterminer, en fonction de k et n, le nombre de racines réelles distinctes $P'(X)$, puis de $P'', \dots, P^{(n)}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on construit un polynôme réel aléatoire $P_n(X)$ comme suit: $P_1(X) = X$, et pour tout $n \geqslant 1$, avec probabilité $1/2$, $P_{n+1}(X) = (X-n)P_n(X)$, et avec probabilité $1/2$, $P_{n+1}(X) = XP_n(X)$.

(3) Déterminer la loi du nombre K_n de racines distinctes de $P_n(X)$.

(4) Déterminer la probabilité que la dérivée d'ordre n de $P_{2n+1}(X)$ possède exactement $n+1$ racines distinctes, et en donner un équivalent quand n tend vers l'infini.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées d'espérance nulle, de variance 1, et telles que $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on note $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, et pour tout réel t strictement positif on définit $N_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}\{S_k > kt\}$.

(1) Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z et pour tout réel u strictement positif on a $\mathbb{P}(Z > u) \leqslant \mathbb{E}[Z]/u$.

(2) Montrer qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier n strictement positif on a
$$\mathbb{E}\left[S_n^4\right] \leqslant \alpha n^2 .$$

(3) En déduire que pour tout $t > 0$, $\mathbb{E}[N_n(t)]$ est majoré par une quantité indépendante de n.

(1) Montrer que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant |x_1| + |x_2| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ .$$

(2) Déterminer
$$\mathcal{E} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x_1| + |x_2| = \sqrt{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\} \ .$$

(3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, il existe $u, v \in \mathcal{E}$ tels que $x = u + v$. Cette décomposition est-elle toujours unique?

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note
$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{et} \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ .$$

(4) Trouver une base $(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ , \quad N_1(u_i) = \sqrt{n} N_2(u_i) \ .$$

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère les ensembles suivants:

$$\mathcal{E} = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } M^2 = I \right\}$$
$$\mathcal{F} = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } M^2 = I \text{ et } M \text{ diagonalisable} \right\}$$
$$\mathcal{G} = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } M^2 = 0 \right\}$$

(1) Donner trois éléments distincts de $\mathcal{F}$, puis de $\mathcal{G}$, lorsque $n = 2$.

(2) Soit $M \in \mathcal{E}$. Quelles peuvent être ses valeurs propres?

(3) Déterminer $\mathcal{F}$. Est-ce un espace vectoriel?

(4) Les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ sont-ils des espaces vectoriels? Justifier.

(5) A-t-on $\mathcal{E} = \mathcal{F}$?

Soient p et q deux nombres réels tels que $0 < p < q < 1$, soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de Bernoulli de paramètre p, et soient $Y_1, \dots, Y_n$ n variables indépendantes de Bernoulli de paramètre q. On pose

$$d(q;p) = q \ln\left(\frac{q}{p}\right) + (1-q)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right) .$$

(1) Montrer que pour tout $x \in \{0,1\}$ on a :

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 = x)}{\mathbb{P}(Y_1 = x)} = \exp\left(-x \ln\left(\frac{q}{p}\right) - (1-x)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)\right) .$$

(2) Pour $x \in \{0,1\}^n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n > qn$, montrer que

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(Y_1 = x_1, \dots, Y_n = x_n)} \leqslant \exp(-nd(q;p)) .$$

(3) En déduire que

$$(\star) \qquad \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > nq) \leqslant \exp(-nd(q;p)) .$$

(4) Montrer que $\mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_n > nq)$ tend vers $1/2$ quand n tend vers l'infini. En déduire une amélioration de l'inégalité $(\star)$ pour n assez grand.

Soit $a \in]0, 2\pi[$. Pour tout entier n, on définit le polynôme

$$P_n(X) = X^{2n} - 2X^n \cos(na) + 1 \ .$$

(1) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a

$$z(X^n - z^n) = (X - z) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} X^k \ .$$

(2) Trouver les racines de $P_n(X)$ pour tout n.

(3) Montrer que pour tout entier n non nul le polynôme $P_1(X)$ divise $P_n(X)$.

(4) Trouver les coefficients du quotient de $P_n(X)$ par $P_1(X)$.

Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires discrètes de moyenne nulle.

(1) Montrer que

$$(\star) \qquad |\mathrm{Cov}(X_1, X_2)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)\right) \quad .$$

(2) Déterminer les cas d'égalité de $(\star)$.

(3) Soit la matrice

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \mathrm{Var}(X_2) \end{pmatrix}$$

On admet qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \geqslant \beta > 0$ tels que

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad .$$

Exprimer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ en fonction de α, β et θ, puis montrer que

$$|\mathrm{Cov}(X_1, X_2)| \leqslant \frac{1-c}{2}\left(\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)\right)$$

avec

$$c = \frac{2\beta}{\alpha + \beta} \in]0, 1] \quad .$$

Soit $n \geqslant 1$ un entier et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note ξ leur moyenne, σ^2 leur variance (supposée finie), et l'on pose

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \ .$$

(1) Calculer le biais et la variance de $\overline{X}$ comme estimateur de ξ.

(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit

$$Y_\lambda = \lambda \overline{X} \ .$$

Calculer le biais de Y_λ comme estimateur de ξ. Calculer l'erreur quadratique moyenne de Y_λ, c'est-à-dire $\mathbb{E}\left[(Y_\lambda - \xi)^2\right]$. Pour quelle valeur de λ est-elle minimale?

(3) Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$Z_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \ .$$

Calculer le biais de Z_α comme estimateur de ξ, puis l'erreur quadratique moyenne de Z_α, c'est-à-dire $\mathbb{E}\left[(Z_\alpha - \xi)^2\right]$.

(4) Parmi les $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tels que Z_α est sans biais, quelle(s) valeur(s) de α rendent l'erreur quadratique moyenne de Z_α minimale?
Et si l'on retire la contrainte d'être sans biais, quel est l'estimateur Z_α d'erreur quadratique moyenne minimale?

On appelle *chemin auto-évitant NOE* de taille n tout n-uplet $w \in \{N, O, E\}^n$ tel que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\},\ (w_k, w_{k+1}) \notin \{(E, O), (O, E)\}\ .$$

On pose $a_0 = 1$, et pour tout entier n strictement positif, on appelle a_n le nombre de chemins auto-évitants NOE de taille n distincts.

(1) Déterminer a_1 et a_2.

(2) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$.
Indication: on pourra distinguer trois catégories de chemins auto-évitants de taille n : ceux qui se terminent par N, ceux qui se terminent par NO, et les autres (qui sont en tout a_{n-1}).

(3) En déduire que pour tout réel x suffisamment proche de zéro on a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1+x}{1-2x-x^2}\ .$$

(4) Donner un équivalent et une expression simple pour a_n quand n tend vers l'infini.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \neq (0, 0)\,, \quad f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^2}$$

et $f(0, 0) = 0$.

(1) Montrer que f est continue en $(0, 0)$.

(2) Déterminer les éventuels points critiques de f. Correspondent-ils à des extrema de la fonction f ?

(3) Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$ et calculer sa différentielle.

(4) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Soit $n \geqslant 1$ un entier, $\sigma > 0$ un réel et $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Dans tout l'exercice, on notera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sous forme de vecteurs-lignes.
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, X_i suit une loi normale de moyenne m_i et de variance σ^2. On note $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $M = {}^tXX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, exprimer $M_{i,j}$ en fonction de $X_1, \ldots, X_n$.

(2) En notant $\mathbb{E}[M] = (\mathbb{E}[M_{i,j}])_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que
$$\mathbb{E}[M] = \sigma^2 I_n + {}^tmm \ .$$

(3) Diagonaliser la matrice $\mathbb{E}[M]$.

(4) Déterminer
$$\max_{v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0} \left\{ \frac{v\mathbb{E}[M]\,{}^tv}{v\,{}^tv} \right\} \ .$$

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par les relations:

$$u_0 = u_1 = 1, \quad \forall n \geqslant 0, u_{n+2} = 8\sqrt{u_n u_{n+1}}\ .$$

Pour tout entier n, on pose $v_n = \ln(u_n)$.

(1) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est bien définie pour tout n, et vérifie la relation de récurrence:

$(\star)$ $$n \geqslant 0, v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2} + 3\ln(2)\ .$$

(2) Trouver un réel α tel que la suite de terme général αn satisfasse la relation de récurrence $(\star)$.

(3) Montrer que la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = v_n - \alpha n$ satisfait une relation de récurrence simple.

(4) En déduire une expression simple de u_n pour tout n.

Soit $n \geqslant 1$ un entier et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i}$$

la trace de M. De plus, on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad M_{i,i} \geqslant M_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = 1 \ .$$

(1) Montrer que $\mathrm{Tr}({}^tPP) \geqslant 0$ pour tout $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que si $P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Tr}({}^tPP) \leqslant \mathrm{Tr}(P)$.

(3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des matrices $P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Tr}({}^tPP) = \mathrm{Tr}(P)$.

(4) Calculer le nombre d'éléments de $\mathcal{E}_n$.

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable en 0, on définit la fonction $B_f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad B_f(x) = f(x) - f(0) - xf'(0)\ .$$

(1) Calculer $B_f(x)$ lorsque $f(t) = t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) Écrire un développement limité à l'ordre 1 en 0 pour B_f.

(3) Quelle interprétation graphique donner à $B_f(x)$, et en particulier à son signe?

(4) Déterminer l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire sous la forme $g = B_f$ pour une fonction f dérivable en 0.

Soit $d \geqslant 2$ un entier. On considère désormais une fonction $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ différentiable en 0, et l'on définit alors la fonction $B_f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d\,, \quad B_f(x) = f(x) - f(0) - df_0(x)$$

où $df_0 : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ désigne la différentielle de f en 0.

(5) Calculer B_f lorsque $f(t) = \sum_{i=1}^d t_i^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$.

On note $\mathcal{M}_2(\{0,1\})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels M telles que $M_{i,j} \in \{0,1\}$ pour tout $i,j \in \{1,2\}$.

(1) Combien y a-t-il de matrices $M \in \mathcal{M}_2(\{0,1\})$? Parmi celles-ci, combien sont-elles inversibles?

(2) Soient $B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}, B_{2,2}$ des variables aléatoires indépendantes, suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$. On définit

$$B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\{0,1\}) \qquad \text{et} \qquad R = \operatorname{rang}(B) \ .$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire R. Calculer son espérance, sa variance.

(3) Même question avec $p \in [0,1]$ quelconque.

(4) Pour quelle(s) valeur(s) de p la probabilité que B est inversible est-elle maximale? Pour quelle(s) valeur(s) de p l'espérance de R est-elle maximale?