Sujets HEC B/L 2013

4. SUJETS DE L'OPTION B/L

Exercice principal B/L3

1. Question de cours : Noyau, image et rang d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit f l'application définie sur E par : pour tout $P \in E$, $f(P)(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

2.a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(X^k)$ (on distinguera les deux cas : k pair et k impair).

c) Déterminer le noyau $\text{Ker} f$ et l'image $\text{Im} f$ de l'endomorphisme f. Quel est le rang de f ?

3. Soit M la matrice de f dans la base canonique de E.

a) Déterminer M.

b) Donner les valeurs propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

4. Soit Q un polynôme de $\text{Im} f$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E$ vérifiant : $f(P)(X) = Q(X)$ et $P(0) = P'(0) = 0$ (P' est le polynôme dérivé du polynôme P).

5. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose : $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p\, fois}$. Déterminer en fonction de n, le plus petit entier strictement positif p_0 pour lequel on a : $\text{Ker}(f^{p_0}) = E$.

Exercice sans préparation B/L3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite, et soit un nombre réel $\theta \neq 0$. On pose : $Y_0 = X_0$ et $\forall n \geqslant 1$, $Y_n = \theta Y_{n-1} + X_n$.

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n.

2. Calculer pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+h})$.

Exercice principal B/L7

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale impropre.

Soit F la fonction réelle de la variable réelle telle que $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

2. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de F.

3. Montrer que F est strictement décroissante sur $\mathcal{D}$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

5.a) Établir pour tout réel $u \geqslant 0$, l'encadrement : $0 \leqslant 1-\mathrm{e}^{-u} \leqslant u$.

b) En déduire que F est continue sur $\mathcal{D}$.

6. Soit un réel $A > 0$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$.

Exercice sans préparation B/L7

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement : $P(X=n) \leqslant P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n)\frac{n+1}{n+1-\lambda}$.

2.a) Montrer que $P(X \geqslant n)$ est équivalent à $P(X=n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $P(X > n) = o\big(P(X=n)\big)$.

Sujet HEC 2012 B/L

Exercice principal B/L1

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2.a) Établir l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

b) À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$, que l'on justifiera, montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \pi$.

3. Montrer que la fonction $g = \dfrac{1}{\pi} f$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

4. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, de densité g. Soit G la fonction de répartition de X.

a) Établir l'existence de l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X. En déduire la valeur de $E(X)$.

b) Calculer pour tout x réel, $G(x)$. Tracer la courbe représentative de G dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Exercice sans préparation B/L1

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui vérifient $f \circ g = \text{Id}$, où Id est l'endomorphisme identité de E.

Démontrer les trois propositions suivantes :

a) $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.

b) $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.

c) $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$.

Exercice principal B/L6

1. Question de cours : Densité d'une variable aléatoire réelle et relation avec la fonction de répartition.

2.a) Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$ est convergente. On définit alors la fonction f sur $\mathbb{R}_*^+$ par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$.

b) Justifier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_*^+$. Pour $x > 0$, calculer la dérivée $f'(x)$.

3.a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt$.

b) À l'aide d'une intégration par parties dont on justifiera la validité, montrer que pour $x > 0$: $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}\ln x + \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt$.

c) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^k f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^k f(x)$.

4.a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Montrer que g peut être considérée comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$.

b) Montrer que X admet des moments de tous ordres.

c) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le moment $E(X^k)$ d'ordre k.

Exercice sans préparation B/L6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que : $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

2. On suppose que $f+g$ est bijectif et que $g \circ f = 0$. Montrer que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$.

Sujet d'oral HEC BL 2011

Sujet BL 304 - Exercice

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 \neq 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}.$$

1) Question de cours : Enoncer le principe du raisonnement par récurrence.

2) Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$-$\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ et le signe de $f(x) - x$. Donner l'allure de la courbe représentative de f.
Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

3) On suppose dans cette question que $u_0 > 1$.
Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\quad u_n \geqslant 2(1+\sqrt{2})$.
Montrer que la suite (u_n) est croissante et déterminer sa limite.

4) Etudier de même le cas où $u_0 < 1$.
Montrer que la suite (u_n) est monotone. Etudier la nature de cette suite.

Sujet BL 304 - Exercice sans préparation

Soit n un entier $\geqslant 2$ et k un entier de $[\![1,\ n-1]\!]$.
Une urne contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On les tire toutes une à une sans remise.
Soit X la variable aléatoire égale au rang de la dernière boule blanche tirée.
Déterminer la loi de X.
Calculer son espérance et sa variance.
On rappelle la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n]\!], \quad \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Sujet BL 305 - Exercice

1) Question de cours : Critères de convergence d'une série à termes positifs.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$, à valeurs réelles, par : $f_n(x) = \left(1 - x^n\right)^{1/n}$.

On pose, pour $n \geqslant 2$: $u_n = 1 - \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

2) a) Etudier les variations de la fonction f_n sur $[0,1]$.
Calculer la dérivée seconde de f_n et en déduire que f_n est une fonction concave.

b) Montrer que la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé, est symétrique par rapport à la première bissectrice.

c) Montrer que l'unique point fixe de f_n sur $[0,1]$ a pour abscisse $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/n}$.

3) On pose, pour tout $n \geqslant 2$: $v_n = (1 - x_n)^2$ et $w_n = \displaystyle\int_0^{x_n} \left(1 - f_n(x)\right)\,dx$.
A l'aide de la représentation graphique de f_n, montrer que : $u_n = v_n + 2w_n$.

4) a) Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

b) Etablir, pour tout réel y positif, la relation :

$$1 - y^{1/n} = \frac{1-y}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} y^{k/n}}.$$

c) En déduire que l'on a : $0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{2}{(n+1)^2}$.

d) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Sujet BL 305 - Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$. On lance n pièces de monnaie équilibrées. On définit les événements :
A : « On obtient Face au plus une fois »,
B : « On obtient Face au moins une fois et Pile au moins une fois ».

Montrer qu'il existe une valeur de n pour laquelle A et B sont indépendants.

Sujets HEC 2010 BL

Sujet BL 1 - Exercice

1) Soit N un entier de $\mathbb{N}^*$. On lance N fois une pièce équilibrée. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ l'espace probabilisé associé à cette expérience.
On désigne par X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de « Face » (respectivement de « Pile ») obtenus.

a) Question de cours : Définition de la covariance de deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
b) Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Dans la suite de l'exercice, le nombre N *de parties est une variable aléatoire définie sur* Ω.
On modélise l'expérience par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

2) On suppose que N suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
a) Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$.
b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3) Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
a) Déterminer les lois de X et de Y. Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de X.
b) En déduire la valeur de $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Sujet BL 1 - Exercice sans préparation

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 5 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = 0 \quad (1)$.
1) Montrer que le rang de f est inférieur ou égal à 2. On rappelle que le rang de f est la dimension de l'image de f.
2) Montrer qu'il existe des endomorphismes de E vérifiant (1), dont le rang est égal à 1 (respectivement égal à 2).

Sujet BL 2 - Exercice

Soit H définie par :

$$\mathrm{H}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2(1+t)} dt$$

1) Question de cours : Citer des conditions suffisantes de convergence pour une intégrale impropre.

2) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\mathrm{H}(x)$ est convergente.

3) Etudier les variations de H sur $]0,+\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

4) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{H}(t)dt$ converge et exprimer cette intégrale en fonction de $\mathrm{H}(0)$.

5) Soit $(x_n)_n$ la suite définie par : $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \mathrm{H}(x_n)$.

a) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{H}(\alpha) = \alpha$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|x_n - \alpha|$.

d) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Sujet BL 2 - Exercice sans préparation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes deux la loi binomiale de paramètres n et p.
Soit $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ et n_0 un entier de $[\![1, 2n]\!]$.
Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[\mathrm{Z} = n_0]$. Reconnaître cette loi.

Sujets oral 2009 B/L HEC

Sujet BL 16 - Exercice

1) Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle.

Soit p un nombre réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit λ et μ deux réels strictement positifs. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} q\lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ p\mu e^{\mu x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

2) Verifier que f est une densité de probabilité.

Soit X *une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*, dont* f *est une densité.*

3) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

4) a) Déterminer p, λ et μ tels que X vérifie :
pour tout $x \geqslant 0$, $\quad \mathbb{P}([X > x]) = \mathbb{P}([X < -x])$.

b) On pose $Y = |X|$. Déterminer la loi de Y.

c) A-t-on, pour tout réel s, pour tout réel t tel que $t \geqslant s$,

$$\mathbb{P}_{[Y>s]}([Y > t]) = \mathbb{P}([Y > t-s])?$$

Sujet BL 16 - Exercice sans préparation

1) Montrer que l'équation : $x^n + nx = 1$ admet, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une unique solution strictement positive, que l'on note x_n.

2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

3) Donner un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Sujet BL 17 - Exercice

Soit x un nombre réel et $\mathrm{M}(x)$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\mathrm{M}(x) = \begin{pmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 1-x & 0 \\ -x & x & 1-2x \end{pmatrix}.$$

On note $\mathrm{E} = \{\mathrm{M}(x) / x \in \mathbb{R}\}$.

1) Question de cours : Définition et propriétés des matrices inversibles.
2) L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
3) L'ensemble E est-il stable par :
- la multiplication par un scalaire ?
- l'addition des matrices ?
- la multiplication des matrices ?

4) Les éléments de E sont-ils inversibles ? Si oui, leur inverse appartient-il à E ?
5) Les éléments de E sont-ils diagonalisables ?
6) Exprimer $[\mathrm{M}(1)]^n$ en fonction de l'entier naturel n.

Sujet BL 17 - Exercice sans préparation

Une urne contient n boules numérotées $1, 2, \ldots, n$ ($n \geqslant 3$). On tire les boules une à une sans remise. Quelle est la probabilité que les boules numérotées 1, 2, 3 sortent dans cet ordre ?

Sujets oral HEC B/L 2008

SUJET N°21

■ *1 - Exercice*

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1° *Question de Cours:* Rappeler la définition et les propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité.

2° Déterminer le réel α tel que la fonction définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{-|x|}$$

soit une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on donne à α cette valeur.
On dit qu'une variable aléatoire de densité f suit la loi de Laplace.

On se donne une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Laplace.

3° Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}\,(X_i)$.

- **a) Déterminer la fonction de répartition F_n de la variable aléatoire Y_n.**
- **b) En déduire une densité de Y_n.**
- **c) Pour n entier, $n \geqslant 2$, justifier l'existence d'un unique réel a_n tel que $F_n(a_n) = 1/2$, et le calculer.**
- **d) Déterminer $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.**

4° a) Justifier, pour tout $w \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(w-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

b) Si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_U et f_V, on admet que la variable aléatoire $W = U + V$ a pour densité la fonction définie par :

$$\forall\, w \in \mathbb{R}\,, \quad f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(w-t)\, f_V(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Déterminer une densité de la variable aléatoire $W = X_1 + X_2$.

■ *2 - Exercice sans préparation*

Soit J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1° Déterminer les valeurs propres de J.
La matrice J est-elle diagonalisable ?

2° Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a^3 & 2 & 1 \\ 0 & a^3-1 & 2 \\ 0 & 1 & a^3 \end{pmatrix}$$

soit inversible.

SUJET N°22

■ *1 - Exercice*

1° ***Question de Cours:*** **Définition des valeurs propres et des vecteurs propres d'un endomorphisme. Définition d'un endomorphisme diagonalisable**

On note G l'ensemble des matrices

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x \\ 2x & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}\,.$$

2° a) Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & M_x \end{array}$$

vérifie $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x+y) = M_x \times M_y$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, M_x est inversible et que $M_x^{-1} \in G$.

3° a) En déduire M_x^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis tout $n \in \mathbb{Z}$.

b) Calculer $M_x^3 - 3M_x^2 + 3M_x - I_3$ (où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

4° Soit x un réel fixé.
On note f_x l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M_x dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que f_x possède une unique valeur propre, que l'on déterminera, et donner la dimension du sous-espace propre associé E_x. L'endomorphisme f_x est-il diagonalisable ?

On suppose désormais $x \neq 0$.

b) Justifier que $\mathcal{U} = \big(e_2, e_3, e_1 - x\,e_3\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice N_x de f_x dans cette base.

c) Calculer N_x^n pour $n \in \mathbb{N}$.

■ *2 - Exercice sans préparation*

1° Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Min}}\ X_k$. Déterminer la loi de U_n, son espérance et sa variance.

2° Soit N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,\ 1[$ sur $\mathbb{N}^*$. On suppose N indépendante des X_k pour tout k. On définit, pour ω appartenant à l'univers Ω :

$$U(\omega) = \underset{1\leqslant k\leqslant N(\omega)}{\mathrm{Min}}\ X_k(\omega).$$

Déterminer la fonction de répartition de U.

.

D. Exercices donnés en option littéraire B/L

1° Définition des valeurs propres, des vecteurs propres et de la diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On rappelle qu'on note $u^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,

$$u^r = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{r \text{ termes}}.$$

2° On considère un endomorphisme non nul $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $r(x) \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $u^{r(x)}(x) = 0$.

a) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que u^r soit l'application nulle et que u^{r-1} ne soit pas l'application nulle.

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u. Est-il diagonalisable ?

3° u étant défini dans la question précédente, on pose :

$$v = \sum_{k=0}^{r-1} u^k .$$

a) Montrer que v est un isomorphisme de E sur E. Exprimer l'inverse de v en fonction de u.

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme v. Est-il diagonalisable ?

4° Dans cette question, on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant n$, et l'application $U : E \to \mathbb{R}[X]$ qui, à tout polynôme P associe sa dérivée P'.

a) Vérifier que U satisfait les hypothèses (de u) de la question **2°**.

b) En déduire que l'application $\varphi : E \to E$ définie par

$$\forall\, P \in E\,, \quad \varphi(P) = P + P'$$

est bijective et exprimer son inverse en fonction de U.

Question sans préparation

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = a\,\mathrm{e}^{x - a\,\mathrm{e}^{x}} .$$

1° À quelle(s) condition(s) f est-elle une densité de probabilité ?

2° Si X est une variable aléatoire réelle admettant f pour densité, quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^X$?

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$q_n = \prod_{k=0}^{n} \big(1-u_k\big) = (1-u_0)\,(1-u_1)\ldots(1-u_n)$$

et on dit que ce produit est ***convergent*** ssi la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $L > 0$.

On note alors cette limite (appelée produit infini) $L = \displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} \big(1-u_k\big)$.

1-a) Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer la limite des produits suivants :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{1}{k+2}\Big) \quad \text{et} \quad q_n = \prod_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\Big) .$$

1-b) Montrer que si le produit $q_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \big(1-u_k\big)$ converge, alors $\displaystyle\lim_{k\,\infty} u_k = 0$.

1-c) En déduire que le produit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi la série de terme général u_k converge.

2° Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}$ On $\big([X \geqslant n]\big) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
appelle ***taux de panne*** associé la suite réelle définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \qquad x_n = \mathbb{P}_{[X\geqslant n]}\big([X=n]\big) .$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\big([X \geqslant n+1]\big) = (1-x_n)\,\mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)$$

et en déduire l'expression de $p_n = \mathbb{P}\big([X=n]\big)$ en fonction des x_k.

b) Déterminer les lois de variables à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant pour $n \geqslant 1$.

c) Montrer qu'une suite réelle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne ssi $0 \leqslant x_k < 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série de terme général x_k diverge. [RS]

Question sans préparation

Déterminer un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de

$$F(x) = \int_0^x |\sin t| \;\mathrm{d}t .$$