**Planche 1**

*Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.*

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

**Exercice 1** Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire de densité

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda \exp(-\lambda x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $L_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $U_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1. Calculer la fonction de répartition de $L_n$, puis celle de $U_n$.
2. Quelle est la loi de $Y_n = n\lambda L_n$ ?
3. On pose $Z_n = \lambda U_n - \ln(n)$. Calculer la fonction de répartition $F_n$ de $Z_n$, puis trouver la limite de $F_n(x)$ pour tout réel $x$ quand $n$ tend vers l'infini.
4. On dispose de $n$ ampoules identiques, dont on modélise les durées de vie par des variables exponentielles indépendantes. On suppose que l'on sait seulement combien de temps a fonctionné l'ampoule qui a claqué le plus tôt. À partir de cette seule information, proposer un estimateur pour la durée de vie moyenne des ampoules. Cet estimateur est-il sans biais ?

**Exercice 2** Soit $(u_k)$ une suite de réels appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.

Démontrer que la somme

$$\sum_{k \geq 1} (u_k)^{k^2}(1 - u_k)$$

est finie.

*(On pourra étudier la fonction $x \mapsto x^{n^2}(1 - x)$.)*

**Planche 2**

*Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.*

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

**Exercice 1** Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et ayant toutes la loi de Gumbel : pour tout $t$ dans $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X_i \leq t) = \exp(-\exp(-t)).$$

1. Démontrer que $\mathbb{E}[\,|X_i|\,] < +\infty$.
2. On note $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ la plus grande valeur des $X_i$. Montrer que

$$\mathbb{P}(M_n \leq t) = \Pi_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t).$$

3. Déterminer le nombre $a_n$ tel que $M_n - a_n$ suive également la loi de Gumbel.

**Exercice 2** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. Calculer, pour tout $n$,

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{a_i}{A_i})$$

2. En déduire que la série $\sum \ln(1 - \frac{a_i}{A_i})$ converge si et seulement si la série $\sum a_i$ converge.
3. En déduire que la série $\sum \frac{a_i}{A_i}$ converge si et seulement si la série $\sum a_i$ converge.
4. On suppose que la série $\sum a_i$ diverge. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la série $\sum \frac{a_i}{A_i^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Indication : remarquer que, pour $\alpha > 1$, on a $\frac{a_i}{A_i^\alpha} \leq \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{1}{x^\alpha} dx$.

**Planche 3**

*Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.*

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

**Exercice 1** On considère $n > 2$ variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de même loi et de densité

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\theta$ est un paramètre strictement positif. On pose

$$S = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad T = \max(X_1, \cdots, X_n)$$

1. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.
2. Calculer $\mathrm{P}(T \leq t)$. En déduire une densité de $T$ puis $E(T)$ et $V(T)$.
3. On suppose maintenant que $\theta$ est un paramètre inconnu qu'on se propose d'estimer.
   (a) Montrer qu'il existe $a$ et $b$ (dépendants de $n$) tels que $S' = aS$ et $T' = bT$ soient des estimateurs sans biais de $\theta$ Calculer $V(S')$ et $V(T')$
   (b) Entre les deux estimateurs $S'$ et $T'$ lequel doit-on préférer ?

**Exercice 2** On considère la fonction $f$ définie sur $]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\log x + 1}$.

1. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en $0$. La fonction prolongée est-elle dérivable en $0$ ?
2. Étudier les variations des $f$ et déterminer ses points fixes.
3. On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que que $u_n$ converge vers une limite $\ell$ que l'on déterminera.
4. Montrer qu'il existe une constante $c \in ]0, 1[$ tel que $|u_{n+1} - \ell| \leq c|u_n - \ell|$ pour tout $n$.
5. En déduire que la série de terme général $\log(u_n)$ est convergente.