
Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces <u>deux</u> exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min – Interrogation : 30 min

Exercice 1

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $F(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. Montrer que l'on peut prolonger F en une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Que vaut $F(0)$?
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $F'(0)$?
3. F est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

Une urne contient trois boules : une bleue, une blanche, une rouge, dont les tirages sont supposés équiprobables. On effectue des tirages successifs d'une boule, avec remise dans l'urne de la boule tirée après chaque tirage, jusqu'à ce que l'on tire une boule rouge.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule rouge. Donner la loi de X, préciser son espérance et sa variance.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$ on pose : $f_k(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$. Montrer par récurrence sur k que $f_k(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$. On pourra calculer $(1 - x)\, f_k(x)$ de deux manières différentes.
3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues tirées au cours de cette expérience. Donner la loi de Y.
4. Calculer la covariance du couple (X, Y).

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces <u>deux</u> *exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.*

Préparation : 30 min – Interrogation : 30 min

Exercice 1

Soit N un entier strictement positif. On pose : $D_N = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^3} - \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$.

1. Montrer que $D_N > 0$.
2. Donner une majoration de D_N par une puissance négative de N.
3. Quel est l'entier le plus proche de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{n^3}$?

Exercice 2

Soit n un entier au moins égal à 2. Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on tire les boules une à une sans remise. On note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule portant le numéro i sort au i-ième tirage, et 0 sinon. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, donner la loi de X_i, préciser son espérance et sa variance.
2. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$, donner la loi de X_iX_j, préciser son espérance.
3. Calculer l'espérance de S_n.
4. Calculer la variance de S_n.

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces <u>deux</u> exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min – Interrogation : 30 min

Exercice 1

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_n = \int_0^1 t^n \ln t \, dt$ existe, et la calculer.
2. Montrer l'existence de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$.
3. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $\sum_{n=0}^{p} J_n = I - \int_0^1 \frac{t^{p+1} \ln t}{1-t} dt$.
4. On admet que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge et vaut $\frac{\pi^2}{6}$. Donner la valeur de I.

Exercice 2

1. Soit X une variable aléatoire de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$. On note F la fonction de répartition de la loi de X, et Q sa fonction queue définie par $Q(x) = P(X > x)$ pour tout réel x. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} Q(t) = 0$. Montrer que l'espérance de X existe et vaut $\int_0^{+\infty} Q(t) dt$.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_n = \min(X_1, X_2, .., X_n)$. Déterminer la fonction queue W_n, puis la fonction de répartition K_n de la loi de U_n. En déduire l'espérance et la variance de U_n.
3. Soit $p \in]0, 1[$, et soit N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, indépendante des X_n. On pose $U = \min(X_1, X_2, .., X_N)$.
   a. Pour tout $x > 0$, calculer $P(U > x)$. En déduire une densité de la loi de U.
   b. Montrer que U admet une espérance, et calculer sa valeur. On pourra exprimer l'espérance de U en fonction des espérances des variables aléatoires U_n et des probabilités des évènements $(N = n)$.

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min – Interrogation : 30 min

Exercice 1

Soit f la fonction définie par la relation suivante : $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

1. Donner l'ensemble D des réels x pour lesquels cette intégrale a un sens.
2. Montrer que f est dérivable sur D et que sa dérivée est $f'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$. En déduire les variations de f.
3. Soit $g(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{t-1}$. Montrer que $f(x)-g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1, et en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1. On prolonge alors f par continuité en 1.
4. Étudier la dérivabilité de f en 1.

Exercice 2

Soit $d \geq 2$. On considère d balles numérotées de 1 à d. Initialement, on répartit les d balles chacune aléatoirement et indépendamment les unes des autres dans les boîtes A et B, et on note X_0 le nombre de balles placées dans A. Puis on tire au sort un nombre entre 1 et d et on change de boîte la balle portant le numéro correspondant. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de balles que contient A après n épreuves réalisées de cette manière.

1. Donner la loi de X_0 lorsque initialement les d balles sont placées chacune au hasard et indépendamment les unes des autres dans A et B.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $i, j \in \{0, 1, ..., d\}$, calculer la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = j / X_n = i)$.
3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $E(X_{n+1}) = aE(X_n) + 1$ où a est un nombre réel que l'on explicitera.
4. En déduire l'expression de $E(X_n)$ en fonction de $E(X_1)$.
5. Déterminer la limite de $E(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces <u>deux</u> exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min – Interrogation : 30 min

Exercice 1

Pour tout $x \in\ ]0, 1[$ on pose : $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+x^k\right)$, $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-x^k\right)$, $w_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1-x^{2k+1}\right)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée, puis qu'elle converge. On pourra utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité suivante vraie pour tout réel t : $1 + t \leq e^t$.
2. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent.

On note ℓ, ℓ' et ℓ'' les limites respectives des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

3. Prouver que ℓ' est non nulle et en déduire que $\ell\ell'' = 1$.

Exercice 2

Soit λ un réel strictement positif.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,dt$ est convergente, et la calculer.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit f_n la fonction définie par : $f_n(t) = a_n\, t^n e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$, $f_n(t) = at^n e^{-\lambda t}$ si $t < 0$. Déterminer la constante a_n de façon que f_n soit une densité de loi de variable aléatoire X_n . Quelle est la loi de X_0 ?
3. Montrer que X_n admet une espérance et une variance et les calculer.
4. On suppose que pour tout $t > 0$, le nombre de personnes qui passent une porte de magasin depuis son ouverture jusqu'au temps t est une variable aléatoire N_t qui suit une loi de Poisson de paramètre λt. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'ouverture du magasin et le moment où la n-ième personne franchit la porte du magasin. Comparer les événements $(T_n \leq t)$ et $(N_t \geq n)$.
5. En déduire la loi de T_n .

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min – Interrogation : 30 min

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\,dt}{1+t^n}$.

1. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. A l'aide du changement de variable $s = t^n$, montrer que $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\frac{\ln s}{n}}\,ds}{1+s}$.
3. Montrer que les intégrales $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln s\,ds}{1+s}$ et $B = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2 s\,ds}{1+s}$ sont convergentes.
4. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$.
5. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en $\dfrac{1}{n}$ de I_n que l'on exprimera à l'aide de A.

Exercice 2

On considère n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, l'urne numérotée j contient $j - 1$ boules blanches et une boule noire. On effectue l'épreuve suivante : on choisit une urne au hasard, puis on effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans cette urne jusqu'à ce qu'on tire la boule noire. On désigne par X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie, et par Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages qui ont été nécessaires pour obtenir une boule noire pour la première fois.

1. Reconnaître la loi suivie par X, donner son espérance et sa variance.
2. Reconnaître la loi de Y conditionnée par (X = 1), donner son espérance et sa variance.
3. Reconnaître la loi de Y conditionnée par (X = j) pour $j \in \{2, \ldots, n\}$ fixé, donner son espérance et sa variance.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de P(Y = k) sous forme d'une somme finie.
5. Calculer l'espérance de Y.
6. Calculer la covariance du couple (X, Y).