Concours ENSAE BL session 2018
Épreuve de Mathématiques II
(Analyse et Probabilités)
commune avec l'ÉNS Paris Saclay
Rapport du jury

Gabriel Faraud – Dominique Schiltz

Rappelons que l'épreuve consiste en une demi-heure de préparation, pour laquelle le candidat se voit proposer un exercice d'analyse et un de probabilités, suivie d'une demi-heure de passage qui débute par la présentation des résultats obtenus par le candidat et se poursuit par un dialogue avec le jury. Précisons que la durée réglementaire de 30 minutes comprend l'accueil et le départ du candidat, de sorte que celle de la planche proprement dite est légèrement inférieure.

Les sujets

Il est difficile de proposer des exercices tout à la fois originaux, intéressants, abordables et conformes au programme. Le jury s'est surtout attaché à respecter ce dernier point et à maintenir un niveau de difficulté raisonnable et à peu près identique pour les différentes planches. Si des exercices assez classiques ont été repris dans certaines d'entre elles, ils étaient généralement couplés avec d'autres plus originaux. En outre, leur longueur était calculée de façon à donner de quoi nourrir le dialogue au cours de l'interrogation sans avoir à recourir à un exercice supplémentaire : le candidat ne disposait donc pas forcément du temps nécessaire pour les résoudre intégralement au cours de la préparation.

Les candidats

Nous avons vu 108 jeunes filles et jeunes gens dont l'attitude n'a suscité de notre part aucun reproche, bien au contraire. Leur tenue, leur politesse, leur comportement lors de la planche, ont été empreints de la volonté de bien faire et de réaliser la meilleure prestation possible. Certains étaient très à l'aise, d'autres stressés par l'enjeu, mais tous ont cherché à donner le meilleur d'eux-mêmes. Dans l'ensemble, les candidats ont fait montre d'une bonne maîtrise du cours ; ils manquaient surtout d'autonomie, de pratique et de confiance. Beaucoup étaient capables de mener à bien des raisonnements ou calculs à condition de leur en laisser le temps, de les encourager, parfois de corriger les fautes de calcul au fur et à mesure, alors qu'ils n'avaient presque rien fait en préparation. Certains candidats parvenaient finalement à résoudre leur exercice tout seuls ou presque, encouragés par notre approbation à chaque ligne de calcul. En fin de compte, ce n'est pas qu'ils ne savaient pas le faire, mais qu'ils ne savaient pas qu'ils savaient le faire. C'est donc surtout la confiance en soi et l'autonomie que les candidats de l'option BL ont besoin d'acquérir, et les préparateurs peuvent y contribuer lors des interrogations orales et des passages au tableau de leurs étudiants.

Le déroulement

La plupart des candidats avaient manifestement tiré profit de leurs deux ou trois années de préparation, et notamment des interrogations orales. Ils s'exprimaient en général clairement et écrivaient le nécessaire au tableau. Nous avons dû demander à quelques-uns de parler plus distinctement, en outre la gestion du tableau a quelquefois laissé à désirer : en particulier, des calculs étaient parfois menés sur de petites surfaces que la présence du candidat nous empêchait de voir. Le candidat ne doit pas hésiter à effacer des calculs menés à leur terme, tout en conservant le résultat obtenu pour le cas où il serait utile dans la suite de l'exercice. Il convient de s'entraîner lors des interrogations orales à acquérir une écriture ni monstrueuse ni minuscule, de façon à être lisible par l'examinateur tout en n'étant pas obligé d'effacer tout le tableau au terme de trois lignes de calcul.

Les candidats avaient généralement résolu plusieurs questions lors de la préparation, et pour celles qui leur avaient résisté, ils ont souvent indiqué des pistes à explorer en vue de leur résolution. Ces propositions étaient généralement pertinentes, et il suffisait souvent d'un coup de pouce pour les débloquer. Par la suite, le dialogue entre le candidat et l'examinateur est un moment important car il permet à ce dernier d'évaluer la capacité du candidat à exploiter les informations fournies et à utiliser les ressources de son cours pour progresser dans la résolution du problème.

La notation

Nous avons cherché à utiliser au maximum l'éventail des notes de façon à permettre à l'épreuve de jouer pleinement son rôle. Nous avons mis neuf notes inférieures à 5, donc éliminatoires, à des candidats qui ignoraient les notions les plus basiques du programme comme la dérivée d'une fonction ou la linéarité d'une application. À l'opposé, nous avons attribué d'excellentes notes, entre 16 et 19, à des candidats qui maîtrisaient leur sujet, se concentraient sur les points difficiles des exercices et exploitaient pleinement les ressources de leur cours.

L'ENSAE est certainement l'une des grandes écoles de France où la formation en mathématiques est du niveau le plus élevé, et l'ÉNS Cachan, pour laquelle cette épreuve compte également, n'est pas en reste, du moins pour ce qui concerne les études en Sciences Économiques et Sociales. À l'ENSAE, les élèves issus de BL vont se retrouver confrontés à des camarades de MP* dont ils vont devoir égaler le niveau en mathématiques au terme de la première année. Il est donc crucial que la notation reflète, plus encore que leur somme de connaissances, leur capacité de progresser dans cette discipline et leur potentiel d'acquérir des notions nouvelles, au-delà des difficultés de présentation de leur travail ou de leur manque de maturité mathématique. C'est ce que nous nous sommes efforcés de faire, en assumant la part de subjectivité que cela comporte.

Les fonctions usuelles

Les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances sont généralement connues et bien utilisées. Toutefois, plusieurs candidats ont commis des erreurs d'inattention du style $(a^b)^c = a^{(b^c)}$, et la dérivation de a^x a parfois été donnée en xa^{x-1}. En outre, lorsqu'ils sont en présence d'un produit et que les questions précédentes traitaient d'une somme, ils n'ont pas suffisamment le réflexe de recourir aux logarithmes. Les fonctions trigonométriques sont rarement apparues dans nos planches, mais leur maîtrise semble correcte, tout juste avons-nous constaté des erreurs de signe dans leur dérivation ou leur primitivation. Enfin, certaines limites usuelles semblent mal connues, comme par exemple la limite en 1 de $\frac{\ln x}{x-1}$, et les croissances comparées des fonctions exponentielles, logarithmes et puissances ne sont pas toujours maîtrisées ; il n'est pas non plus facile d'obtenir un équivalent simple d'un polynôme de degré donné en $+\infty$

L'étude des fonctions

Nous avons constaté de fréquentes erreurs dans la dérivation des produits et des fonctions composées, ainsi que la dérivation de la constante $f(a)$ en $f'(a)$. Le recours aux fonctions auxiliaires pour démontrer une inégalité a généralement été proposé spontanément. Par contre la notion de limite pose de nombreux problèmes, le moindre étant l'abandon fréquent en cours de route du symbole limite dans une suite de calculs. La notion même de limite est mal comprise, et nous avons entendu plusieurs fois une affirmation du genre : la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est égale à ℓ, donc $f(x)$ est égale à ℓ pour x assez grand ; il n'est pas facile d'obtenir dans cette situation l'égalité $f(x) = \ell + o(1)$. Nous avons même lu $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(0)-f(0)}{0}$… D'ailleurs, la notion de dérivée n'est pas toujours claire non plus, celle-ci étant parfois définie par le taux d'accroissement et non la limite de celui-ci en un point. De même, encadrer une fonction entre deux autres pour en déduire sa limite ne va pas de soi, pas plus qu'encadrer par deux constantes de manière optimale une fonction monotone sur un segment. Par ailleurs, les notions d'équivalence et de négligeabilité ne sont pas bien comprises : nous avons entendu plusieurs fois dire que deux fonctions sont équivalentes en un point quand elles ont la même limite en ce point, et avons entendu plusieurs fois affirmer qu'une fonction donnée est équivalente à la fonction nulle. De plus, la vision géométrique des fonctions est assez limitée, comme par exemple la représentation du fait que $f(x) - \lambda x - \mu$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Enfin, le recours à un développement limité pour lever une indétermination ne va pas de soi, et dans le calcul d'un développement limité à l'ordre 1, les termes de degré 2 sont pieusement conservés, nonobstant la présence d'un $o(x)$ censé les absorber.

Les théorèmes sur les fonctions

Les hypothèses et conclusions des théorèmes sur les fonctions continues et dérivables sont souvent connues, bien qu'il nous ait parfois fallu insister pour que le candidat les mentionne. Le fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée est une propriété à laquelle les candidats ne pensent pas souvent. Bien que souvent utiles, les généralisations du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème de Rolle à un intervalle de longueur infinie sont peu connues, ce que nous n'avons pas pénalisé vu le silence du programme officiel sur ce point, lui qui ne mentionne même pas ces deux théorèmes. Par contre, il cite la formule de Taylor-Young, mais les candidats n'y pensent pas quand il pourrait être utile d'y avoir recours.

Les suites et les séries

À l'instar des propriétés analogues des fonctions, les notions d'équivalence et de négligeabilité des suites sont mal connues, et nous avons entendu des candidats dire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ signifie que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à ℓ pour n assez grand.

Les suites arithméticogéométriques et récurrentes linéaires sont bien identifiées et le calcul de leur terme général est connu, ainsi que la convergence des suites monotones bornées. Les candidats savent établir la convergence des séries par la règle de Riemann et par télescopage de termes, mais ont du mal à voir l'intérêt de la monotonie de la suite $(n^{\alpha}\, u_n)$ pour n assez grand, ou celui de déduire de $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$ le fait que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est inférieur à une constante $k \in]\ell, 1[$ pour n assez grand, puis la majoration de u_n par le terme général d'une série géométrique convergente.

Les intégrales

Le lien entre la notion d'intégrale et celle de dérivée n'est pas toujours fait : il n'a pas été facile d'obtenir des candidats qu'ils déduisent de $f' = g$ l'égalité $f(x) = \int_a^x g(t)dt + \lambda$, les constantes a et λ étant à déterminer en fonction des données de l'énoncé. D'autre part, certains candidats n'imaginent pas qu'il existe des fonctions dont les primitives ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles : c'est le cas en particulier la densité de la loi normale centrée réduite, et il faut y songer quand on effectue une intégration par parties. C'est d'ailleurs cette opération qui nous a généralement été proposée pour étudier une intégrale, et ceci même quand le changement de variable était la méthode la plus pertinente, mais les candidats ont souvent eu quelques difficultés à mener à bien ce dernier type d'opération. Quand c'est l'intégration par parties, les candidats devraient se souvenir qu'une primitive n'est définie qu'à une constante près, et qu'un choix judicieux de cette constante permet souvent de conclure plus facilement : en particulier, quand on primitive une densité continue, on peut recourir à l'opposé de la fonction queue plutôt qu'à la fonction de répartition.

Pour justifier l'annulation sur l'intervalle d'intégration d'une fonction positive ou nulle dont l'intégrale est nulle, a souvent manqué l'hypothèse de continuité de cette fonction. Par ailleurs, comme le résultat analogue pour les séries, il n'a pas été évident d'obtenir la convergence de l'intégrale d'une fonction positive ou nulle majorée par une fonction d'intégrale convergente.

Les dénombrements

Nous avons constaté quelques confusions entre les combinaisons et les arrangements, et les choix ordonnés ou non ordonnés. D'ailleurs, il a souvent été difficile de faire dénombrer des situations simples. Curieusement, la formule $\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}\,A}{\mathrm{Card}\,\Omega}$ semble méconnue. Les candidats mènent sans s'en rendre compte des raisonnements recourant aux probabilités conditionnées : ainsi, pour déterminer la probabilité de l'évènement $A_k =$ « la k-ième boule tirée porte le numéro k », ils écrivent : $\mathrm{P}(A_k) = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\frac{1}{n-k+1}$, et sont quelque peu surpris d'obtenir finalement $\frac{1}{n}$. Mais ils sont incapables de donner un nom à la formule qu'ils ont utilisée. Enfin, la formule de Pascal servant à construire le triangle éponyme n'est pas souvent reconnue.

Les probabilités

Cette partie du cours a causé de nombreuses difficultés aux candidats. D'abord la description par une phrase d'un évènement donné est souvent difficile à obtenir. Ensuite il y a fréquemment eu confusion entre indépendance et incompatibilité, et en présence d'une réunion d'évènements indépendants, peu de candidats ont pensé à passer aux évènements contraires. Dans la formule des probabilités totales – souvent nommée formule des probabilités conditionnées – les probabilités des conditions ont été souvent oubliées, ce qui amenait parfois à un résultat supérieur à 1 : cela doit faire immédiatement réagir le candidat qui doit reconnaître qu'il a commis une erreur. Enfin, les théorèmes de limite monotone sont mal connus, et les candidats ont des difficultés à reconnaître une suite croissante ou décroissante d'évènements, et quand c'est le cas, ils n'en voient pas l'intérêt.

Les variables aléatoires discrètes

Nous avons relevé quelques erreurs de formules pour l'espérance et la variance de lois connues. Plus étonnant, la manipulation des variables de Bernoulli était souvent laborieuse, notamment pour déterminer la loi de leur produit. Lorsqu'on déterminait la fonction de répartition d'une loi, il n'était pas facile en général d'en déduire cette loi par une formule du type $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq k) - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq k - 1)$. Dans le même ordre d'idées, il est utile de connaître et de savoir démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est égale à $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} > k)$.

Les vecteurs aléatoires

Nous avons constaté plusieurs fois des confusions entre la loi marginale d'une variable aléatoire et ses lois conditionnées par les valeurs d'une autre. Les candidats ne pensent pas suffisamment aux limitations induites par les conditions d'une expérience : ainsi, il n'est pas possible de tirer une boule numérotée k d'une urne qui n'en contient pas. L'espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes est mal connue, de même que la formule pour la covariance utilisant les variances. Enfin, le lemme dit des coalitions n'est pas souvent utilisé correctement.

Les variables aléatoires à densité

Il est regrettable que souvent les candidats ne fournissent pas spontanément les propriétés qui caractérisent une densité ou une fonction de répartition, et ne les vérifient pas sur l'exemple qu'ils traitent ou la fonction qu'ils ont obtenue : c'est une bonne habitude qui permet souvent de déceler une erreur notamment dans les intervalles de définition de ces fonctions, en particulier si la fonction de répartition prend des valeurs supérieures à 1, voire tend vers l'infini en $+\infty$. Nous avons constaté quelques confusions entre densité et fonction de répartition, mais surtout les candidats ne pensent pas suffisamment aux limitations induites par la définition de la densité : si celle-ci vaut $2t$ sur [0, 1] et est nulle ailleurs, il ne faut pas essayer de calculer l'espérance par la formule $\int_0^{+\infty} 2t^2 dt$. Par ailleurs, il importe de connaître la définition de la variance, de reconnaître l'intégrale qui donne la variance de la loi normale centrée réduite et de maîtriser l'emploi du théorème de transfert.

Conclusion

Les remarques qui précèdent gardent pour l'essentiel leur pertinence pour les prochaines sessions nonobstant le changement de programme qui interviendra en 2019. Que les candidats et les préparateurs soient assurés que celui-ci sera pris en compte dans le choix des exercices qui leur seront proposés, autant pour ce qui concerne les suppressions que les ajouts. D'ici là, nous leur proposons quelques-uns des exercices posés cette année pour leur permettre de se faire une idée de ce qui pourra les attendre l'année prochaine.