Chapitre 4

Option B/L

Exercice 4.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2 et soit u un endomorphisme non nul de E pour lequel il existe un entier naturel $p \geqslant 2$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1. Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Soit q un entier vérifiant $0 \leqslant q \leqslant p-1$ et $x \in E$ tel que $u^q(x) \neq 0$.
   Justifier l'existence d'un tel vecteur x. Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^q(x))$ est une famille libre de E.
3. On note Id l'endomorphisme identité de E et soit v l'endomorphisme de E défini par :

$$v = Id + u + \frac{u^2}{2!} + \cdots + \frac{u^{p-1}}{(p-1)!}$$

   Montrer que v est bijectif.
4. Déterminer un lien entre $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Ker}(v - Id)$.
5. En déduire les valeurs propres de v. L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

Solution de l'exercice 4.1

1. Si $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors pour tout $k \geqslant 1, u^k(x) = \lambda^k x$ ce qui entraîne que $\lambda^p = 0$ et $\lambda = 0$. Réciproquement, 0 est valeur propre de u, car sinon, u^{-1} existerait et par composition on aurait $u = 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}\,(u) = \{0\}$ et u n'est pas diagonalisable car autrement, u serait nul.
2. Par l'absurde si, pour tout $x \in E$, $u^q(x) = 0$, alors $u^q = 0$ en contradiction avec $u^{p-1} \neq 0$. Par définition de $u^{p-1} \neq 0$, il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Comme $q \leqslant p-1$, on a $u^q(x) \neq 0$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k u^k(x) = 0$. En composant par u^{p-1}, il vient $a_0 = 0$, puis par u^{p-2}, on obtient $a_1 = 0$, etc.
3. Montrons que $\mathrm{Ker}(v) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$ et supposons $x \neq 0$. Alors :
$$x + \frac{u(x)}{1!} + \frac{u^2(x)}{2!} + \cdots + \frac{u^{p-1}(x)}{(p-1)!} = 0$$
Soit q le plus grand entier tel que $u^q(x) \neq 0$, c'est-à-dire tel que $u^q(x) \neq 0$ et $u^k(x) = 0$, pour $k \geqslant q+1$. On a alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{q} \frac{u^j(x)}{j!} = 0$, en contradiction avec la question précédente. Donc $x = 0$.
On pourrait aussi montrer, en effectuant un produit de deux polynômes, que la réciproque de v est $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{u^k}{k!}$.
4. Il est évident que $\mathrm{Ker}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(v - Id)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(v - Id)$ et si $u(x) \neq 0$, on note q le plus grand entier tel que $u^q(x) \neq 0$. Le même raisonnement que précédemment aboutit à une contradiction. Donc $u(x) = 0$.
5. Soit λ une valeur propre de u. Alors $v(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda^k}{k!}\right) x$. Comme 0 est la seule valeur propre de u, 1 est valeur propre de v.
Réciproquement, si λ est valeur propre de v, alors
$$(1-\lambda)x + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{u^k(x)}{k!} = 0$$
Le même raisonnement que dans les deux questions précédentes, montre que si $\lambda \neq 1$, on obtient une contradiction concernant la liberté de la famille $(x, u(x), \ldots, u^q(x))$. Donc $\lambda = 1$.
L'endomorphisme v n'est pas diagonalisable car sinon, v serait égal à l'identité et u serait nul.

Exercice 4.2

1. Soit a un réel positif ou nul. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'équation d'inconnue x réel : $x^n + n^a x - 1 = 0$. Montrer que cette équation admet une seule solution sur $\mathbb{R}^{+*}$. On la note x_n.
2. Étudier la convergence de la suite (x_n).
3. On suppose $a > 0$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{1/n^a} = 1$.
   (b) Soit $b > 0$. Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum x_n, \quad \sum \ln(x_n), \quad \sum \ln(1 + x_n^b), \quad \sum \left(x_n - \frac{1}{n^a}\right)$$

Solution de l'exercice 4.2

1. On étudie $f_n : x \to x^n + n^a x - 1$. Sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n(0)f_n(1) < 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. Comme $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$ pour n assez grand, on a alors $x_n < \dfrac{1}{2}$. On sait que $x_n^n + n^a x_n = 1$, donc :
$$0 < x_n = \frac{1 - x_n^n}{n^a} \leqslant \frac{1}{n^a}.$$
Ainsi, si $a > 0$, par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
Si $a = 0$, on a $f_n(x) = x^n + x - 1$. En étudiant $f_{n+1}(x_n) < 0$, on montre que la suite (x_n) est croissante. Elle est majoré par 1 et donc converge. Supposons que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
Si $\ell < 1$, comme $0 < x_n < \ell$ par croissance, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$: contradiction. Donc $\ell = 1$.

3. (a) On a $x_n = \dfrac{1 - x_n^n}{n^a}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, on a $0 < x_n < 1/2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{1/n^a} = 1$.

   (b) La série $\sum x_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^a}$. On peut également conclure avec un critère de comparaison car $0 < x_n < 1/2 \Longrightarrow 1/n^a - 1/n^a 2^n < x_n < 1/n^a$.
   La série $\sum \ln(x_n)$ diverge grossièrement.
   On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Donc si $b > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x_n^b)}{x_n^b} = 1$ et la série $\sum \ln(1+x_n^b)$ se comporte comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{ab}}$ (ou bien, par comparaison).
   Enfin, comme $x_n - \dfrac{1}{n^a} = -\dfrac{x_n^n}{n^a}$ et comme $x_n < 1/2$, alors $\left|x_n - \dfrac{1}{n^a}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et la série $\sum \left(x_n - \dfrac{1}{n^a}\right)$ converge.

Exercice 4.3

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{2\mathrm{e}^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Faire une étude rapide de la fonction f : domaine de définition, variations, limites aux bornes du domaine de définition, asymptotes éventuelles.
2. On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   On admet que, pour tout $t \geqslant 0$, on a : $f(t) > t$.
   Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).
3. On considère l'application G définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ G(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

   Étudier les variations de G.
   Étudier la limite éventuelle de la suite $(G(u_n))$.

Solution de l'exercice 4.3

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et $f'(t) = \dfrac{2\mathrm{e}^t(t^2-t+1)}{(1+t^2)^{3/2}}$. Son signe est celui de $t^2-t+1>0$.
   La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   De plus, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$, par croissances comparées.
   La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.
2. Comme f est à valeurs positives et $u_n \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Comme $f(t) \geqslant t$, alors la suite (u_n) est croissante. Si elle est majorée, elle converge vers une limite ℓ telle que $f(\ell)=\ell$ ce qui n'est pas possible au vu de la proposition admise. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Comme f est continue, elle admet une primtive F et la fonction G est de classe C^1 d'après le théorème fondamental du calcul intégral puisque $G(x) = F(x) - F(-x)$. Alors :

$$G'(x) = f(x) + f(-x) = 2\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

   Donc, la fonction G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ est convergente car $|f(t)| \leqslant 2\mathrm{e}^t$, donc $F(-u_n)$ converge quand n tend vers $+\infty$.
   Mais l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ tend vers $+\infty$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} tf(t) = +\infty$, donc $F(u_n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
   Ainsi, la suite de terme général $G(u_n) = F(u_n) - F(-u_n)$ est divergente et tend vers $+\infty$.

Exercice 4.4

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n).$$
   (b) On suppose que la série $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.
   (c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance.
   Démontrer alors que la suite $\big(n\mathbb{P}(X > n)\big)$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge et enfin que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.
2. *Une application* : soit n et N deux entiers naturels non nuls. On dispose d'une urne qui contient N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue dans cette urne, n tirages successifs avec remise d'une boule et on note X le plus grand nombre obtenu.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$. En déduire la loi de X.
   (b) A l'aide des questions précédentes, déterminer l'espérance de X en fonction de n et N.

Solution de l'exercice 4.4

1. (a) La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\mathbb{P}(X>j) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X>k)(k+1-k)\right) + \mathbb{P}(X>0) - n\mathbb{P}(X>n)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n)
\end{aligned}$$

   (b) Si on suppose la série à termes positifs $\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(X>k)$ convergente, alors, la question précédente donne, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$.

   La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}(X>k)$ est majorée et croissante.

   La série est donc convergente mais aussi absolument convergente et X admet ainsi une espérance.

   (c) On suppose que X admet une espérance, alors la série $\sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}(X=k)$ est convergente. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant n\mathbb{P}(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$.

   Ce dernier terme étant le reste d'une série convergente, il tend donc vers 0. Le théorème d'encadrement donne alors : $\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = 0$.

   En utilisant l'égalité de la question 1.(a), on obtient alors successivement que la série $\sum_{k\leqslant 0}\mathbb{P}(X>k)$ converge puis que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$.

2. (a) On a tout d'abord : $X(\Omega) = [\![1,N]\!]$.

   On note E_i la variable aléatoire qui donne le résultat du i-ième tirage. Cette variable suit une loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$.

   Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(X\leqslant k) = \mathbb{P}\left((E_1\leqslant k)\cap\ldots\cap(E_n\leqslant k)\right) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$ par indépendance des tirages (remise). Par suite, $\mathbb{P}(X>k) = 1-\left(\frac{k}{N}\right)^n$.

   Pour tout entier $k\in[\![1,N]\!]$, on en déduit : $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X\leqslant k) - \mathbb{P}(X\leqslant k-1) = \dfrac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$.

   (b) La variable aléatoire X étant finie, elle admet une espérance. On a :

   $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k) = \sum_{k=0}^{N-1}\left(1-\left(\frac{k}{N}\right)^n\right) = N - \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$.

Exercice 4.5

On considère un dé bien équilibré à 6 faces. On lance ce dé jusqu'à obtenir les six faces et on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers.

On suppose que l'expérience est modélisée avec un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que X est la somme de 6 variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois géométriques dont on précisera les paramètres respectifs.
2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère un dé bien équilibré à n faces et on note X_n le nombre de lancers nécessaires pour obtenir les n faces.

   Montrer que X_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois géométriques dont on précisera les paramètres respectifs.
3. Exprimer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ sous forme de sommes.
4. *On rappelle* que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E\Big(\frac{X_n}{n\ln(n)}\Big)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V\Big(\frac{X_n}{n\ln(n)}\Big)$.

Solution de l'exercice 4.5

1. Au premier lancer, on obtient un numéro d'une face. On note Y_1 la variable aléatoire constante égale à 1 que l'on peut considérer comme suivant une loi géométrique de paramètre 1. Puis on continue les lancers jusqu'à obtenir un autre numéro que le premier obtenu, ce qui se produit avec une probabilité 5/6. Donc, le nombre de lancers nécessaires Y_2 correspond à une loi géométrique de paramètre 5/6 et ainsi de suite, on définit la variable aléatoire Y_i suivant une loi géométrique de paramètre $(7-i)/6$ et on a :

$$X = \sum_{i=1}^{6} Y_i.$$

L'indépendance des variables aléatoires $X_1, \dots, X_6$ provient de l'indépendance des lancers.

2. Le même raisonnement donne :

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ où } Y_i \text{ suit la loi } \mathcal{G}\Big(\frac{n-i+1}{n}\Big), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

3. On a par linéarité de l'espérance et changement d'indice :

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Par indépendance des variables, on a :

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = n \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{j^2}.$$

4. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} E\Big(\frac{X_n}{n\ln(n)}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1\,.$$

Par ailleurs :

$$V\Big(\frac{X_n}{n\ln n}\Big) = \frac{1}{n^2\ln^2 n} n \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{j^2} = \frac{1}{\ln^2 n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} - \frac{1}{n\ln n} \times \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\,.$$

La série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{j^2}$ est convergente, donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = 0$ et puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln n} \times \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 0$. Par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V\Big(\frac{X_n}{n\ln n}\Big) = 0$.

Exercice 4.6

Soit m un entier naturel non nul. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_m[x]$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à m et l'application f associant à tout polynôme P de $\mathbb{R}_m[x]$, le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ Q(x) = m(x-1)P(x) - x(x-1)P'(x)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[x]$.
2. Montrer que si P est un vecteur propre de f, alors 0 ou 1 sont racines de P.
3. Pour tout entier naturel $k \leqslant m$, on note W_k la fonction polynomiale de $\mathbb{R}_m[x]$ définie par :

   $$W_k(x) = x^k(x-1)^{m-k}\,.$$

   Montrer que pour tout k, W_k est un vecteur propre de f.
4. Quelles sont les valeurs propres de l'endomorphisme f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
5. Montrer que $(W_0, W_1, \cdots, W_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[x]$ et déterminer les composantes du polynôme constant $U(x) = 1$ dans cette base.

Solution de l'exercice 4.6

1. On calcule $f(x^k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant m$. On a :
$$f(x^k) = m(x-1)x^k - x(x-1)kx^{k-1} = (m-k)x^{k+1} - (m-k)x^k.$$
Si $k < m$, alors $f(x^k)$ est de degré $k+1$ donc est dans $\mathbb{R}_m[x]$. De même, pour $k = m$, $f(x^m) = 0$ et donc est dans $\mathbb{R}_m[x]$. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_m[x]$. On a :
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k,$$
On montre ensuite que :
$$f(P)(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k f(x^k),$$
On en déduit que f est une application de $\mathbb{R}_m[x]$ dans $\mathbb{R}_m[x]$. On prouve la linéarité directement, donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[x]$.
2. Soit P un vecteur propre de f ; alors il existe un réel λ tel que :
$$f(P) = \lambda P,$$
soit
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ m(x-1)P(x) - x(x-1)P'(x) = \lambda P(x).$$
En particulier pour $x = 0$ et $x = 1$, on obtient :
$$-mP(0) = \lambda P(0) \text{ et } 0 = \lambda P(1).$$
Si $\lambda = 0$, alors 0 est racine de P et si $\lambda \neq 0$, alors 1 est racine de P. Par conséquent, 0 ou 1 sont racines de P.
3. Soit $k \leqslant m$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f(W_k)(x) &= m(x-1)x^k(x-1)^{m-k} - x(x-1)(kx^{k-1}(x-1)^{m-k} + (m-k)x^k(x-1)^{m-k-1}) \\ &= mx^k(x-1)^{m-k+1} - kx^{k-1+1}(x-1)^{m-k+1} - (m-k)x^{k+1}(x-1)^{m-k-1+1} \\ &= (m-k)\,(x-1-x)\,W_k(x) \\ &= (k-m)W_k(x). \end{aligned}$$
Par conséquent, W_k est un vecteur propre de f.
4. Les valeurs $(k-m)$, $0 \leqslant k \leqslant m$, sont des valeurs propres de f ; il s'agit donc de $m+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Puisque $\mathbb{R}_m[x]$ est de dimension $m+1$, on en conclut que f est diagonalisable.
5. $(W_0, W_1, \cdots, W_m)$ est une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}_m[x]$. On considère le polynôme constant $U(x) = 1$; on applique la formule du binôme de Newton et on obtient :
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ U(x) = 1 = ((-x) + (x-1))^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} W_k(x).$$

Exercice 4.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^2}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.
2. (a) Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.
   (b) Montrer que X possède une variance (on ne demande pas sa valeur).
3. On note F la fonction de répartition de X. Montrer, sans calculer $F(x)$, que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I que l'on précisera.
4. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = F(X)$.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Calculer l'expression de $F(x)$ pour tout réel x.
   (c) Déterminer F^{-1}, bijection réciproque de F.

Solution de l'exercice 4.7

1. La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient bien défini de telles fonctions. De plus, pour $x > 0$, on a :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{2e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2x}+1} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2}$$

   Par parité de la fonction f, on déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

   Ainsi, f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire .

2. (a) Pour tout réel t positif, on a : $0 < tf(t) = \dfrac{2t}{(e^t + e^{-t})^2} \leqslant 2te^{-2t}$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2te^{-2t}dt$ converge (c'est l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2). Pour terminer, la fonction $t \to tf(t)$ est impaire donc $E(X)$ existe et vaut 0.

   (b) Pour tout réel t positif, on a : $0 < t^2 f(t) = \dfrac{2t^2}{(e^t + e^{-t})^2} \leqslant 2t^2 e^{-2t}$. On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-2t}dt$ converge (moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2). Par parité de la fonction $t \to t^2 f(t)$, on conclut que X admet un moment d'ordre 2 et donc que $V(X)$ existe.

3. La fonction f est continue, strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 et de dérivée f. De plus, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, ce qui permet d'affirmer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

4. (a) La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. Ainsi, Y prend ses valeurs dans $]0, 1[$. De plus, pour tout $x \in]0, 1[$, en notant F_Y la fonction de répartition de Y et par le fait que F est une bijection strictement croissante, comme F^{-1}, on a :

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(F(X) \leqslant x) = P(X \leqslant F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$$

   Ainsi, Y suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

   (b) Pour tout réel x, on trouve, d'après la question 1 :

$$F(x) = 1 - \frac{1}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

   (c) Pour déterminer F^{-1}, on résout, pour tout x réel, l'équation $F(t) = x$ d'inconnue t, dont la solution est :

$$F^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Exercice 4.8

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit U et V deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2.
   (a) En développant $(|U| - |V|)^2$, montrer que UV possède une espérance.
   (b) En considérant la quantité $(\lambda U + V)^2$ pour λ réel, montrer l'inégalité suivante :
   $$(E(UV))^2 \leqslant E(U^2)E(V^2)$$
2. On considère une variable aléatoire X à valeurs positives, qui n'est pas quasi certaine et qui possède une variance. On désigne par α un réel de $[0, 1]$ et on note Y la variable aléatoire indicatrice de l'événement $[X > \alpha E(X)]$, soit ;
   $$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X > \alpha E(X) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (a) Écrire l'espérance de Y en fonction de X et α.
   (b) Vérifier l'inégalité (entre variables aléatoires) suivante : $X \leqslant \alpha E(X) + XY$.
   (c) Justifier que $E(X^2) \neq 0$, puis déduire de ce qui précède l'inégalité :
   $$P\big(X > \alpha E(X)\big) \geqslant (1-\alpha)^2 \frac{(E(X))^2}{E(X^2)}$$
3. (a) Que devient cette inégalité si X suit la loi binomiale de paramètres n et p ?
   (b) En déduire que $(1-p)^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{(n-1)p+1}$

Solution de l'exercice 4.8

1. (a) On sait que $|UV| \leqslant \dfrac{1}{2}\big(U^2+V^2\big)$, donc, par domination, UV possède une espérance.

   (b) La quantité $(\lambda U+V)^2$ est un polynôme du second degré en λ qui est positif pour tout λ réel. Son discriminant est négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité (de Cauchy-Schwarz) demandée.

2. (a) L'espérance d'une variable indicatrice est égale à son paramètre. Donc $E(Y)=P(X>\alpha E(X))$.

   (b) Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant \alpha E(X) + X(\omega)Y(\omega)$ (regarder suivant les valeurs prises par $Y(\omega)$) car $\alpha E(X) > 0$.

3. Si $E(X^2)=0$, alors $V(X)=0$ et X est quasi certaine ce qui n'est pas le cas. Donc $E(X^2)\neq 0$.
   D'après la question précédente, $XY \geqslant X-\alpha E(X)$, puis $E(XY)\geqslant E(X-\alpha E(X)) = (1-\alpha)E(X)$.
   En élevant au carré $(E(XY))^2 \geqslant (1-\alpha)^2(E(X))^2$.
   En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a $(1-\alpha)^2E(X)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$. Mais, Y suivant une loi de Bernoulli, on a $Y=Y^2$ d'où $E(Y^2)=E(Y)$ et

$$P\big(X>\alpha E(X)\big) \geqslant (1-\alpha)^2\frac{(E(X))^2}{E(X^2)}$$

4. (a) Lorsque X suit la loi binomiale de paramètres n et p, on obtient $P(X>\alpha np) \geqslant (1-\alpha)^2\dfrac{np}{(n-1)p+1}$.

   (b) On choisit $\alpha = 0$ et on obtient le résultat annoncé.

Exercice 4.9

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire et on effectue dans cette urne des tirages selon le protocole suivant : à chaque tirage, une boule est prélevée de l'urne et est remplacée par deux boules de la même couleur (que celle que l'on vient de prélever). On souligne qu'après n tirages, il y a $n+2$ boules dans l'urne. On note X_n le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages et on cherche à déterminer la loi de X_n pour tout $n \geqslant 1$.

On suppose que l'expérience est modélisée avec un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
   Indication : On pourra considérer les événements $(A_k)_{k\geq 1}$, où A_k est défini par « on tire une boule blanche lors du k-ème tirage ».
3. Calculer, pour $n \geqslant 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.
4. Calculer, pour $n \geqslant 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k+1)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.
5. En déduire la loi de X_n.

Solution de l'exercice 4.9

1. Notons que X_1 est à valeurs dans $\{1, 2\}$, et que X_1 vaut 1 si au premier tour on a tiré la boule noire, et X_1 vaut 2 si on a tiré la boule blanche. On a donc $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \dfrac{1}{2}$ (car il y a dans l'urne une boule noire et une boule blanche).
2. Pour X_2, on remarque que X_2 est à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$: X_2 vaut 1 si on a tiré une boule noire lors des deux tirages ; X_2 vaut 2 si on a tiré une boule noire puis une boule blanche ou une boule blanche puis une boule noire ; X_2 vaut 3 si on a tiré une boule blanche lors des deux tours. On a donc $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(\overline{A}_1) \cap \overline{A}_2) = \mathbb{P}(\overline{A}_1)\mathbb{P}_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)$. Notons que $\mathbb{P}(\overline{A}_1) = \dfrac{1}{2}$ car au premier tirage il y a une boule blanche et une boule noire dans l'urne. On a aussi $\mathbb{P}_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2) = \dfrac{2}{3}$ car si on a tiré une boule noire au premier tirage alors il y a une boule blanche et deux boule noires dans l'urne au deuxième tirage. On a donc $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{3}$. De la même manière, on a $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(\overline{A}_1)\mathbb{P}_{\overline{A}_1}(A_2) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(\overline{A}_2) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$; et enfin $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$. En conclusion, on a montré que $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 3) = \dfrac{1}{3}$.

3. et 4. Conditionnellement à $[X_n = k]$, il y a k boules blanches et $(n + 2 - k)$ boules noires dans l'urne après n tours. Lors du $(n + 1)$-ème tour, on tire donc une boule blanche avec probabilité $\dfrac{k}{n+2}$ et une boule noire avec probabilité $\dfrac{n+2-k}{n+2}$: avec les notations précédentes, on a $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(A_{n+1}) = \dfrac{k}{n+2}$ et $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(\overline{A}_{n+1}) = \dfrac{n+2-k}{n+2}$. Notons que l'événement A_{n+1} correspond au fait qu'après le $(n + 1)$-ème tour il y a une boule blanche supplémentaire : $A_{n+1} = \{X_{n+1} = X_n + 1\}$ et $\overline{A}_{n+1} = \{X_{n+1} = X_n\}$. On a donc montré que

$$\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = X_n + 1) = \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k + 1) = \frac{k}{n+2},$$
$$\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = X_n) = \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$

5. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n + 1]\!])$. Pour $k = 1$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1, X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence et la question 3.
Si c'est vrai pour $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a : $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_n = k, X_{n+1} = k) + \mathbb{P}(X_n = k-1, X_{n+1} = k)$, car si $X_{n+1} = k$, X_n ne peut valoir que k ou $k - 1$.
Par suite, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{n+2-k}{n+2} + \dfrac{1}{n+1}\dfrac{k-1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$, où on a aussi utilisé l'hypothèse de récurrence et les questions 3 et 4.
Enfin, pour $k = n + 2$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = n + 2) = \mathbb{P}(X_n = n + 1)\mathbb{P}_{(X_n=n+1)}(X_{n+1} = n + 2) = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Cela montre bien que pour tout $k \in \{1, \ldots, n + 2\}$, on a $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{1}{n+2}$

Exercice 4.10

On considère une famille d'urnes numérotées par les entiers de $\mathbb{N}^*$: pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la k-ème urne contient une boule noire et k boules jaunes.

Un joueur tire successivement (au hasard, uniformément et de manière indépendante entre les urnes) une boule dans l'urne numéro 1, puis une boule dans l'urne numero 2, puis une boule dans l'urne numéro 3, etc. On note X_n le nombre de boules noires obtenues lors des n premiers tirages ($n \geqslant 1$).

On suppose que l'expérience est modélisée avec un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Justifier que l'on peut écrire $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$, où A_k est l'événement « lors du k-ème tirage, la boule tirée par le joueur est noire »et où la variable aléatoire $\mathbf{1}_{A_k}$ est définie par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbf{1}_{A_k}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Exprimer $\mathbb{E}(X_n)$ sous forme de somme.
3. Calculer $V(X_n)$.
4. Montrer que $V(X_n) \leqslant \mathbb{E}(X_n)$.
5. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\big|X_n - \mathbb{E}(X_n)\big| \geqslant \varepsilon \mathbb{E}(X_n)\Big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(X_n)}\,.$$

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(n+2) - \ln 2 \leqslant \mathbb{E}(X_n) \leqslant \ln(n+1)$.
7. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \in \ \big]1-\varepsilon, 1+\varepsilon\big[\Big) = 1\,.$$

8. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\ln n}$.

Solution de l'exercice 4.10

1. La variable aléatoire $\mathbf{1}_{A_i}$ vaut 1 si on tire une boule noire lors du i-ème tirage et 0 sinon : l'expression $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}$ compte donc le nombre de boules noires tirées lors des n premiers tirages.
2. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}$.
3. Les variables aléatoires $(\mathbf{1}_{A_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ étant indépendantes d'après l'énoncé, on a :
$$V(X_n) = V\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} V(\mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)(1-\mathbb{P}(A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)^2},$$
où on a utilisé la propriété selon laquelle la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut $p(1-p)$.
4. En utilisant l'inégalité $1-\mathbb{P}(A_i) \leqslant 1$, on en déduit que :
$$V(X_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{E}(X_n)\,.$$
5. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la question 4.
6. On a $\frac{1}{i+1} \geq \frac{1}{x+1}$ pour tout $x \in [i, i+1]$ car la fonction $x \mapsto 1/(x+1)$ est décroissante. Ainsi, pour tout $i \geqslant 1$,
$$\frac{1}{i+1} = \int_i^{i+1} \frac{1}{i+1}\mathrm{d}x \geqslant \int_i^{i+1} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\,,$$
et donc,
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\,.$$
Par une intégration directe, on obtient $\int_1^{n+1} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = [\ln(x+1)]_1^{n+1} = \ln(n+2) - \ln 2$.
On a donc $\mathbb{E}(X_n) \geqslant \ln(n+2) - \ln 2$.
Par un raisonnement similaire, on obtient le majorant :
$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \leqslant \int_0^n \frac{1}{x+1} = \ln(n+1).$$
7. En passant au complémentaire et en réécrivant l'événement $\{\big|\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} - 1\big| \geqslant \varepsilon\}$ sous la forme $\{\big|X_n - \mathbb{E}(X_n)\big| \geqslant \varepsilon\mathbb{E}(X_n)\}$, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \in \ ]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} - 1\Big| < \varepsilon\Big) &= 1 - \mathbb{P}\Big(\big|X_n - \mathbb{E}(X_n)\big| \geqslant \varepsilon\mathbb{E}(X_n)\Big)\\ &\geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon^2\mathbb{E}(X_n)}\,.\end{aligned}$$
Comme $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$, on obtient le résultat.
8. On déduit aisément de la question 6 que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\ln n} = 1$.

Exercice 4.11

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2 et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on pose $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. (a) Montrer que l'application $\mathrm{tr} : A \to \mathrm{tr}(A)$ est linéaire.
   (b) Montrer que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}({}^tA)$.
   Dans la suite de l'exercice, on note :
$$S_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/M = {}^tM\} \text{ et } A_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/M = -{}^tM\}$$
2. Montrer que $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans E.
   Pour A de E, on note $\Delta_A = \{M \in E/M + {}^tM = \mathrm{tr}(M)A\}$.
3. Montrer que Δ_A est un sous-espace vectoriel de E tel que $A_n(\mathbb{R}) \subset \Delta_A$.
4. Soit $M \in \Delta_A$. Montrer que $2\,\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{tr}(A)$.
5. Déterminer Δ_A en discutant suivant les valeurs de $\mathrm{tr}(A)$.

Solution de l'exercice 4.11

$S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices symétriques de E et l'ensemble des matrices antisymétriques de E.

1. (a) On vérifie que $\text{tr}(\lambda M + N) = \lambda\,\text{tr}(M) + \text{tr}(N)$.

   (b) La matrice M et sa transposée ont la même diagonale.

2. On écrit $M = \dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2} \in S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$ et on vérifie que $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.

3. L'ensemble Δ_A est un sous-espace vectoriel de E par linéarité de la trace, de la transposition, etc.
   La diagonale d'une matrice antisymétrique n'est constituée que de 0.
   Donc, on a bien, pour $M \in A_n(\mathbb{R}), 0 = 0\,\text{tr}(A)$.

4. On prend la trace des deux membres et on obtient : $2\,\text{tr}(M) = \text{tr}(M)\,\text{tr}(A)$.

5.
   - Si $\text{tr}(A) \neq 0$, alors $\text{tr}(M) = 0$ et $M + {}^tM = 0$. Donc M est antisymétrique.
   - si $\text{tr}(A) = 2$, la relation $2\,\text{tr}(M) = \text{tr}(M)\,\text{tr}(A)$ ne donne rien.
     - si $\text{tr}(M) = 0$, on retombe sur les matrices antisymétrques, et si $\text{tr}(M) \neq 0$, alors :
     - si A n'est pas symétrique, il n'y a pas de solutions.
     - si A est symétrique, alors comme $A = \dfrac{A + {}^tA}{2} + \dfrac{A - {}^tA}{2}$, il vient $M = A + B$ avec $B \in A_n(\mathbb{R})$.
       En effet, $\text{tr}(M) = \text{tr}(A) = 2$ et ${}^tM = A - B$ et $M + {}^tM = 2A = \text{tr}(M)A$.

Chapitre 5

Exemples de questions courtes

Question sans préparation 1

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}X_k$$

Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.

Question sans préparation 2

Soit (σ_n) une suite de réels strictement positifs.
On considère une suite (X_n) de variables aléatoires telles que, pour tout entier naturel n, X_n suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_n^2)$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $(\sigma > 0)$.
Montrer que :

$$X_n \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\sigma_n = \sigma$$

Question sans préparation 3

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\int_{n+\sqrt{n}}^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx.$

Question sans préparation 4

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Reconnaître la loi de $Y = \lfloor X\rfloor + 1$. En déduire $\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor)$ et $V(\lfloor X\rfloor)$.

Question sans préparation 5

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} T$.

Question sans préparation 6

Soit $\in \mathbb{N}^*$. Soit l'ensemble $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^n = 0\}$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{N}$.

1. Quelles sont les matrices symétriques qui appartiennent à $\mathcal{N}$?
2. En déduire que $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Question sans préparation 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - \mathrm{tr}(M)A$.
À quelles conditions sur A l'application f est-elle bijective ?

Question sans préparation 8

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/ AM = MA\}$.

1. Vérifier rapidement que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer
$$\max_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \dim C(A) \text{ et } \min_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \dim C(A)$$

Question sans préparation 9

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On note Φ sa fonction de répartition.
Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))dt$.

Question sans préparation 10

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit U l'application définie sur E par :
$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \int_0^x \cos(t) f(x-t)dt$$

1. Montrer que U est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $U(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.