CHAPITRE

4

OPTION B/L

Sujet n° 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La transposée d'une matrice M sera notée ${}^tM$. Dans cet exercice, on confondra $\mathbb{R}^n$ et l'espace des matrices colonnes réelles $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On rappelle qu'alors, le produit scalaire est défini par :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \langle X, Y\rangle = {}^tXY$$

On étudie les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété (P) suivante :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, {}^tYAX = 0 \Rightarrow {}^tXAY = 0$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tA = A$. Une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite anti-symétrique si ${}^tB = -B$.

1. Vérifier que $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, {}^tYAX$ est un nombre réel.
2. Montrer que si A est symétrique ou anti-symétrique, alors A vérifie la propriété (P).
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que pour tout $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tZAZ = 0$.
   (a) Établir que pour tout $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, ${}^tYAX = -{}^tXAY$.
   (b) En déduire que A est anti-symétrique.

   On suppose dans toute la suite de l'exercice que A vérifie la propriété (P) et n'est pas anti-symétrique.

4. (a) Montrer qu'alors ${}^tA$ vérifie (P).
   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $(\mathrm{Vect}(AX))^\perp = (\mathrm{Vect}({}^tAX))^\perp$ puis que $\mathrm{Vect}(AX) = \mathrm{Vect}({}^tAX)$.
   (c) En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $\alpha_X \in \mathbb{R}$ tel que ${}^tAX = \alpha_X AX$.
   (d) En conclure que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = \alpha_X\, {}^tXAX$.
5. Montrer qu'il existe Y telle que ${}^tYAY \neq 0$ et qu'on a alors ${}^tAY = AY$.
6. Soit Y telle que ${}^tYAY \neq 0$.
   (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que AX est non nulle et colinéaire à AY. Montrer que ${}^tAX = AX$.
   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que AX est non colinéaire à AY. En considérant ${}^tA(X+Y)$, montrer que ${}^tAX = AX$.
   (c) En conclure que A est symétrique.

Solution du sujet n° 1

1. ${}^tYAX$ est le produit scalaire de Y et AX.
2. Soient X et Y deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors : ${}^t({}^tXAY) = {}^tY({}^tAX) = {}^tYAX$, donc ${}^tYAX = 0 \Rightarrow {}^tXAY = 0$. De même si $A \in A_n(\mathbb{R})$: ${}^t({}^tXAY) = {}^tY({}^tAX) = -{}^tYAX$, donc ${}^tYAX = 0 \Rightarrow {}^tXAY = 0$.
3. (a) Soient X et Y deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $Z = X + Y$. On a alors : ${}^tZAZ = 0 \Leftrightarrow {}^t(X+Y)A(X+Y) = 0 \Leftrightarrow {}^tYAX = -{}^tXAY$.

   (b) On a d'une part ${}^tYAX = \langle {}^tAY, X\rangle$ et d'autre part ${}^tXAY = \langle X, AY\rangle$, d'où d'après 2.a), il vient : $\langle {}^tAY + AY, X\rangle = 0$ pour tout X, soit ${}^tAY + AY = 0$ donc ${}^tA = -A$.
4. (a) Soient X et Y deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a alors : ${}^tX{}^tAY = \langle AX, Y\rangle = \langle Y, AX\rangle = {}^tYAX$. D'où : ${}^tX{}^tAY = 0 \Rightarrow {}^tYAX = 0 \Rightarrow {}^tXAY = 0$ car A vérifie (P). Or ${}^tXAY = \langle X, AY\rangle = \langle AY, X\rangle = {}^tY{}^tAX$. D'où : ${}^tX{}^tAY = 0 \Rightarrow {}^tY{}^tAX = 0$. Ainsi ${}^tA$ vérifie (P).

   (b) $Y \in (\mathrm{Vect}(AX))^\perp \Leftrightarrow \langle Y, AX\rangle = 0 \Leftrightarrow {}^tYAX = 0 \Rightarrow {}^tXAY = 0$ car A vérifie (P). Or ${}^tXAY = 0 \Leftrightarrow \langle {}^tAX, Y\rangle = 0$, d'où $Y \in (\mathrm{Vect}({}^tAX))^\perp$. On a donc : $(\mathrm{Vect}(AX))^\perp \subset (\mathrm{Vect}({}^tAX))^\perp$. Or puisque A vérifie (P), ${}^tA$ vérifie (P) d'après la question précédente. Et on a donc $(\mathrm{Vect}({}^tAX))^\perp \subset (\mathrm{Vect}({}^t({}^tA)X))^\perp = (\mathrm{Vect}(AX))^\perp$, d'où l'égalité d'espaces vectoriels. On a donc :

   $$\left((\mathrm{Vect}({}^tAX))^\perp\right)^\perp = (\mathrm{Vect}({}^tAX)) = \left((\mathrm{Vect}(AX))^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(AX)$$

   (c) Puisque $\mathrm{Vect}(AX) = \mathrm{Vect}({}^tAX)$, il existe $\alpha_X \in \mathbb{R}$ tel que ${}^tAX = \alpha_X AX$.

   (d) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors : ${}^tX{}^tAX = \alpha_X {}^tXAX$. De plus ${}^t({}^tX{}^tAX) = {}^tXAX$, avec ${}^tXAX \in \mathbb{R}$, donc égal à sa transposée. Ainsi : ${}^tX{}^tAX = {}^t({}^tX{}^tAX)$, et donc ${}^tXAX = \alpha_X {}^tXAX$.
5. D'après la question 3, comme A n'est pas anti-symétrique, alors $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tYAY \neq 0$. Or d'après la question 3d, on a : ${}^tYAY = \alpha_Y {}^tYAY$ donc $\alpha_Y = 1$ et ${}^tAY = AY$.
6. (a) ${}^tYAX = {}^t({}^tAY)X = {}^t(AY)X$ d'après la question 5, donc ${}^tYAX = {}^tY{}^tAX = {}^tY\alpha_X AX = \alpha_X {}^tYAX$. Or $\exists\lambda \in \mathbb{R}, AX = \lambda AY$. D'où : ${}^tYAX = \lambda {}^tYAY \neq 0$. D'où $\alpha_X = 1$ et ${}^tAX = AX$.

   (b) ${}^tA(X+Y) = \alpha_{X+Y}A(X+Y) = \alpha_{X+Y}AX + \alpha_{X+Y}AY$. Or ${}^tA(X+Y) = {}^tAX + {}^tAY = \alpha_X AX + AY$. (AX, AY) étant une famille libre, on obtient : $\alpha_{X+Y} = \alpha_X$ et $\alpha_{X+Y} = 1$. D'où $\alpha_X = 1$ et ${}^tAX = AX$.

   (c) On a donc montré que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tAX = AX$, d'où ${}^tA = A$, donc A est symétrique.

Sujet n° 2

Soient $b, r \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard dans cette urne ; après chaque tirage on remet la boule tirée dans l'urne et l'on y rajoute une deuxième boule de la même couleur que celle qui a été tirée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire indicatrice de l'événement « la n-ième boule tirée est blanche »— c'est-à dire que X_n vaut 1 si la n-ième boule tirée est blanche, et 0 sinon. On note S_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du n-ème tirage.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{E(S_n)}{b+r+n}$.
4. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la variable X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.

Désormais on suppose que $b = r = 1$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(S_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$ et calculer $P(S_n = n+1)$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

   En déduire que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Solution du sujet n° 2

1. Comme $X_1(\Omega) = \{0,1\}$, X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(X_1 = 1) = \frac{b}{b+r}$.
2. De même X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(X_2 = 1)$, soit, avec le SCE $(X_1 = 0), (X_1 = 1)$:

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) \quad \text{(form. probas totales)} \\ &= \frac{r}{b+r}\frac{b}{b+r+1} + \frac{b}{b+r}\frac{b+1}{b+r+1} = \frac{b(r+b+1)}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{b}{b+r}. \end{aligned}$$

3. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = k)_{b\leqslant k\leqslant b+n}$, donne :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n = k)P_{[S_n=k]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{r+b+n}\sum_{k=b}^{b+n} kP(S_n = k) = \frac{E(S_n)}{r+b+n}.$$

4. Montrons par récurrence forte sur $n \geqslant 1$ que : $P(X_{n+1} = 1) = \frac{b}{b+r}$; (cela suffit car $X_n(\Omega) = \{0,1\}$).
   - **Initialisation :** d'après la question 1.
   - **Hérédité :** si c'est vrai pour jusqu'à n, comme $S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$, par linéarité de l'espérance :

$$E(S_n) = b + \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = b + n \times \frac{b}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}.$$

   D'où, d'après Q3 : $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{E(S_n)}{r+b+n} = \dfrac{b(b+r+n)}{b+r}\dfrac{1}{r+b+n} = \dfrac{b}{b+r}$.

5. Comme $(S_n = 1) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{X_k}_{\geqslant 0} = 0\Big) = \bigcap_{k=1}^{n}(X_k = 0)$, la formule des probabilités composées donne :

$$P(S_n = 1) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 0)\times\cdots\times P_{(X_1=0)\cap\cdots\cap(X_{n-1}=0)}(X_n = 0) = \frac{1}{2}\times\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1+k}{2+k} = \frac{1}{n+1}.$$

   En inversant les rôles des boules blanches et rouges, on obtient de même $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

6. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = \ell)_{1\leqslant \ell\leqslant n+1}$, donne :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} P\big((S_{n+1} = k) \cap (S_n = \ell)\big) \\ &= P\big((S_{n+1} = k) \cap (S_n = k-1)\big) + P\big((S_{n+1} = k) \cap (S_n = k)\big) \\ &\qquad \text{car } (S_{n+1} = k) \cap (S_n = \ell) = \emptyset \text{ si } \ell \notin \{k-1, k\}, \text{ puisque } S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \\ &= P_{(S_n=k-1)}(X_{n+1} = 1) \times P(S_n = k-1) + P_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 0) \times P(S_n = k) \\ &= \frac{k-1}{n+2}P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}P(S_n = k). \end{aligned}$$

   On en déduit par récurrence sur $n \geqslant 1$ que : $\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ P(S_n = k) = \frac{1}{n+1}$.
   - **Initialisation :** $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2) = \mathcal{U}([\![0,1]\!])$ d'après Q1 avec $r = b = 1$.
     Donc $S_1 = 1 + X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,2]\!])$.
   - **Hérédité :** Si c'est vrai pour n, d'après Q5, on a $P(S_{n+1} = 1) = P(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}$ et, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, d'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= \frac{k-1}{n+2}P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}P(S_n = k) \\ &= \frac{k-1}{n+2}\times\frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2}\times\frac{1}{n+1} \quad \text{(d'après } HR_n\text{)} \\ &= \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Sujet n° 3

Soit F donnée par : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}dt$

1. (a) Préciser le domaine de définition D de F.
   (b) Déterminer les limites de F aux bornes de D.
   (c) Montrer que F est décroissante sur D.

   On admet que F est continue sur D.
2. (a) Montrer que F vérifie : $\forall x \in D \quad F(x) + F(x+1) = \dfrac{1}{x}$
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} xF(x) = 1$.
   (c) Représenter graphiquement la fonction F.
3. (a) Soit $x \in D$ fixé. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ on a : $\dfrac{t^{x-1}}{t+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{x+k-1} + R_n(t)$ où R_n est une fonction à préciser.
   (b) En déduire l'expression de F sous forme de série.
4. Retrouver cette expression à l'aide de la question 2.

Solution du sujet n° 3

1. (a) Posons $f_x(t) = \dfrac{t^{x-1}}{t+1}$; alors $f_x \in C^0(]0,1],\mathbb{R}^+)$. Sur $]0,1]$, on a $0 \leqslant \frac{1}{2}t^{x-1} \leqslant f_x(t) \leqslant t^{x-1}$.

   Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}$ converge si et seulement si $1-x<1$ (intégrale de Riemann). Donc, par comparaison, on a : $D =]0;+\infty[$.

   (b) Sur $[0,1]$
$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{t+1} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{x-1}dt \leqslant F(x) \leqslant \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$$
   d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

   (c) La fonction F est décroissante car $x \to \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est positive et décroissante.

2. (a) $\forall x>0 \;\; F(x)+F(x+1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^x}{t+1}dt = \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$.

   (b) Comme F et continue en 1, on a : $F(x+1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F(1)$.

   Donc $xF(x) = 1 - xF(x+1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

3. (a) $\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}$

   $\Rightarrow\;\; f_x(t) = \dfrac{t^{x-1}}{t+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{x+k-1} + (-1)^{n+1}\frac{t^{x+n}}{1+t}$ d'où $R_n = (-1)^{n+1}\dfrac{t^{x+n}}{1+t}$

   (b) $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{x+k-1}dt + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{x+n}}{1+t}dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(1)^k}{x+k} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{x+n}}{1+t}dt$

   Or $|(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x+n}}{1+t}dt| \leqslant \int_0^1 t^{x+n}dt = \frac{1}{x+n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

   D'où $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$

4. $\begin{cases} F(x)+F(x+1) = \dfrac{1}{x} \\ F(x+1)+F(x+2) = \dfrac{1}{x+1} \\ \vdots \\ F(x+n)+F(x+n+1) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ en multipliant la seconde par (-1), la troisième par $(-1)^2$, ..., la dernière par $(-1)^n$, puis en faisant la somme, on obtient : $F(x)+(-1)^nF(x+n+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+k}$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x+n+1) = 0$ on obtient : $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$

Sujet n° 4

Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, de densités respectives f_1 et f_2 strictement positives et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x^2 + y^2) = f_1(x)f_2(y)$.

1. **Dans cette question seulement**, on suppose que X_1 et X_2 suivent la loi normale centrée réduite. Déterminer $g(x)$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $y \in \mathbb{R}$
$$\frac{f_1'(x)}{2xf_1(x)} = \frac{g'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)}$$
3. On pose $h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)}$.
   (a) Montrer que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}^*$. On note cette constante a.
   (b) Soit $k(x) = f_1(x)\mathrm{e}^{-ax^2/2}$. En calculant $k'(x)$, montrer que k est constante sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire l'expression de $f_1(x)$.
4. (a) Montrer que $a < 0$.
   (b) En déduire la loi de X_1, puis la loi de X_2.

Solution du sujet n° 4

1. Pour $y = 0$, il vient $g(x^2) = f_1(x)f_2(0)$ et, comme g est défini sur $\mathbb{R}^+$

$$g(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-x/2}$$

2. Les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables. La fonction g également. On dérive par rapport à x. Il vient, pour tout y réel $f_1'(x)f_2(y) = 2xg'(x^2 + y^2)$. Donc pour $x \neq 0$, en divisant par $f_1(x)f_2(y)$

$$\frac{f_1'(x)}{2xf_1(x)} = \frac{g'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)}$$

3. On pose $h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)}$.
   (a) Soit $x_1 \neq x_2$. On a, pour tout y réel

   $$h(x_1) = \frac{g'(x_1^2 + y^2)}{g(x_2^2 + y^2)} \text{ et } h(x_2) = \frac{g'(x_2^2 + y^2)}{g(x_2^2 + y^2)}$$

   Avec $y = x_2$ dans la première égalité et $y = x_1$ dans la seconde, on obtient $h(x_1) = h(x_2)$. On remarque que pour tout $x \neq 0$, $f_1'(x) = axf_1(x)$

   (b) Soit $k(x) = f_1(x)\mathrm{e}^{-ax^2/2}$. La fonction k est dérivable pour $x \neq 0$ et $k'(x) = \mathrm{e}^{-ax^2/2}(f_1'(x) - axf_1(x)) = 0$.

   (c) Il existe donc deux constantes C_1, C_2 telles que

   $$f_1(x) = \begin{cases} C_1\mathrm{e}^{ax^2/2} & \text{si } x > 0 \\ C_2\mathrm{e}^{ax^2/2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Par continuité de f_1, il vient $C_1 = C_2$.

4. (a) La fonction f_1 étant une densité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = 1$ ce qui entraîne que $a < 0$.

   (b) En posant $\sigma = \sqrt{\frac{-1}{a}} > 0$, on obtient que f_1 est la densité d'une loi normale. La constante C est déterminée Par $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)dt = 1$. De même pour f_2. En fait X_1 et X_2 suivent la même loi normale car

   $$f_1(1)f_2(0) = f_1(0)f_2(1) \Rightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

Sujet n° 5

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (x \sin x)^n \, dx$ est bien définie. On la note alors I_n.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante et positive.
4. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$.
5. Montrer que :
$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 - x \sin x} \, dx - \int_0^1 \frac{(x \sin x)^{N+1}}{1 - x \sin x} \, dx$$
6. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} I_n$ converge et donner une expression de sa somme à l'aide d'une intégrale.

Solution du sujet n° 5

1. L'intégrale I_n existe car c'est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment (produit d'un polynôme et d'un polynôme trigonométrique).
2. $I_0 = 1$ et $I_1 = \sin(1) - \cos(1)$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Remarquons que $0 \leqslant x \ \sin x < 1$ car $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, par croissance de la fonction sinus sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, d'où $0 \leqslant x \sin x \leqslant \sin x \leqslant 1$. Ensuite, la décroissance des puissances entières positives d'un réel de $[0, 1]$ donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant (x \sin x)^{n+1} \leqslant (x \sin x)^n \leqslant x^n,$$

en majorant de plus $\sin x$ par 1. Et enfin, on intègre sur $[0, 1]$. Ainsi, on obtient :
$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, donc la suite (I_n) est décroissante et positive.
4. L'inégalité obtenue à la question précédente donne par théorème d'encadrement que la suite (I_n) tend vers zéro.
5. On applique la formule de somme partielle de série géométrique de raison $q = x \ \sin x \in [0, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q},$$

puis on intègre, on applique la linéarité de l'intégration sur $[0, 1]$
On remarque que comme sur le segment $[0, 1]$, $1 - x \ \sin x$ reste strictement positif, la fonction sous la dernière intégrale écrite ci-dessous est bien continue sur le segment $[0, 1]$, et de même pour les deux intégrales suivantes, par quotient défini de fonctions continues sur $[0, 1]$. Ainsi, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} I_n = \int_0^1 \frac{1 - (x \sin x)^{N+1}}{1 - x \sin x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1 - x \sin x}\, dx - \int_0^1 \frac{(x \sin x)^{N+1}}{1 - x \sin x}\, dx$$

6. Posons $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(x \sin x)^n}{1 - x \sin x}\, dx$ et montrons que la suite (J_n) converge vers 0.
La fonction $x \mapsto x \sin x$ est croissante sur $[0, 1]$ comme produit de deux fonctions croissantes positives, et à valeurs dans $[0, 1[$, comme à la question 2.
Donc $g : x \mapsto \dfrac{1}{1 - x \sin x}$ est croissante sur $[0, 1]$, majorée par $M = g(1)$.
Ainsi, en majorant à nouveau $\sin x = |\sin x|$ par 1 et en appliquant la croissance de l'intégration sur $[0, 1]$, on a :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 M x^n\, dx = \frac{M}{n+1}.$$

Enfin, en appliquant le théorème d'encadrement, on obtient que J_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$
D'où la série de terme général I_n est convergente et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 - x \sin x}\, dx$$

Note : pour majorer g, on peut aussi appliquer le théorème concernant l'image continue d'un segment par une fonction strictement positive

Sujet n° 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2.$$

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n sur $\mathbb{R}$ et que a_n appartient à $]0, 1]$.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\quad f_{n+1}(a_n) > 0$.
   (b) En déduire l'éventuelle monotonie de la suite (a_n).
   (c) Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

3. Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

4. On considère la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2}$.
   (a) Montrer que g est croissante sur $[a_2, 1]$.
   (b) On considère la suite $(x_k)_{k \geqslant 0}$ définie par $x_0 = 1$ et $x_{k+1} = g(x_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = a_2$.

Solution du sujet n° 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction polynôme f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f_n est bijective de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $f_n(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x\to-\infty} f_n(x), \lim_{x\to+\infty} f_n(x) \right[= \mathbb{R}$
   Comme $0 \in f_n(\mathbb{R})$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution réelle a_n.
   On remarque de plus que $f_n(0) = -2 < 0$ et $f_n(1) = n^2 + n - 2 = (n-1)(n+2) \geqslant 0$ (étant donné $n \geqslant 1$).
   La stricte croissance de f_n^{-1} sur $\mathbb{R}$ donne alors : $a_n \in]0, 1]$.
2. (a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$f_{n+1}(a_n) = (n+1)a_n^3 + (n+1)^2 a_n - 2 = \underbrace{(na_n^3 + n^2 a_n - 2)}_{=f_n(a_n)=0} + a_n^3 + (2n+1)a_n = a_n^3 + (2n+1)a_n > 0.$$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1})$. Or f_{n+1}^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $a_{n+1} < a_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (c) La suite (a_n) est strictement décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel ℓ positif.
   On suppose alors que $\ell > 0$. Comme $f_n(a_n) = 0 = na_n^3 + n^2 a_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   on obtient $\lim_{n\to+\infty} f_n(a_n) = 0$ mais aussi $\lim_{n\to+\infty} f_n(a_n) = \lim_{n\to+\infty} (na_n^3 + n^2 a_n - 2) = +\infty$.
   On obtient une contradiction avec l'unicité de la limite. La suite (a_n) converge donc vers 0.
3. Comme on a : $n^2 a_n \leqslant n^2 a_n + na_n^3 = 2$, on a $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{2}{n^2}$.
   La série majorante est une série de Riemann de paramètre $2 > 1$ qui converge, donc la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge par critère de comparaison.
4. (a) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $g'(x) = \dfrac{6x(x^3 + 2x - 1)}{(3x^2+2)^2} = \dfrac{3xf_2(x)}{(3x^2+2)^2} \geqslant 0$ sur $[a_2, 1]$ car f_2 est croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en a_2. D'où le résultat demandé.
   (b) Comme $f_2(x_1) = 2\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\dfrac{3}{5}\right) - 2 > 0 = f_2(a_2)$, la croissance de g permet de montrer par récurrence que :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ a_2 \leqslant x_{k+1} \leqslant x_k \leqslant 1.$$
   La suite (x_k) étant décroissante et minorée, elle converge.
   Comme g est continue, sa limite est un point fixe de g.
   Or, pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $g(x) - x = \dfrac{(2x^3+1) - x(3x^2+2)}{3x^2+2} = \dfrac{1 - 2x - x^3}{3x^2+2} = \dfrac{-f_2(x)}{2(3x^2+2)}$,
   qui ne s'annule qu'en a_2, donc le seul point fixe de g est a_2. Ainsi : $\lim_{k\to+\infty} x_k = a_2$.

Sujet n° 7

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (\ e_1, e_2, e_3\ )$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme u de E, qui a pour matrice A dans la base B.

Dans la suite, on confond $\mathbb{R}^3$ et l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à 3 lignes.

On dit qu'un sous-espace F de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est stable par A, si pour tout $X \in F, AX \in F$.

1. (a) Vérifier que -1 et 5 sont valeurs propres de u et déterminer les sous-espaces propres associés E_{-1} et E_5.
   On admet désormais que ces deux valeurs sont les seules valeurs propres de u.
   (b) Les sous-espaces E_{-1} et E_5 sont-ils stables par A ?
   (c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Déterminer tous les sous-espaces de E de dimension 1 qui sont stables par A.
3. Soit P un sous-espace de dimension 2 stable par A.
   (a) Déterminer P si on suppose en plus que P contient E_5.
   (b) Vérifier qu'une solution est $P_1 = \mathrm{Ker}(u - 5Id)^2$.
4. Soit P un sous-espace de dimension 2 stable par A. Que dire de $P \cap P_1$?
5. En déduire tous les sous-espaces vectoriels stables par A.

Solution du sujet n° 7

1. (a) Le calcul donne $(A-5I)X = 0 \iff X = \lambda u_1$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $E_5 = \mathrm{Vect}(u_1)$.

   De même $E_{-1} = \mathrm{Vect}(u_2)$ avec $u_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   Donc $\{-1, 5\} \subset \mathrm{Sp}\,(u)$.

   (b) Tout sous-espace propre d'un endomorphisme est stable par cet endomorphisme.

   (c) Comme $\dim\ E_{-1} + \dim\ E_5 \neq 3$, on voit que u n'est pas diagonalisable.

2. Une droite $D = \mathrm{Vect}(v)$ est stable par u si et seulement si $u(v) \in D$ si et seulement si (Av, v) sont liés si et seulement si v est un vecteur propre de A.

   Les seules droites stables par A sont E_{-1} et E_5

3. (a) Si P contient E_5 alors $P = Vect(u_1, v)$ avec $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et (u, v) libres.

   $A(P) \subset P \iff A(v) \in P \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : A(v) = \alpha u_1 + \beta v$ soit $\left\{ \begin{array}{r} 6a - 6b + 5c = \alpha + \beta a \\ -4a - b + 10c = \alpha + \beta b \\ 7a - 6b + 4c = \alpha + \beta c \end{array} \right.$

   (1)-(3) $\Rightarrow c - a = \beta(a - c)$

   cas 1 : $a \neq c \Rightarrow \beta = -1$ avec $\left\{ \begin{array}{r} 7a - 6b + 5c = \alpha \\ -4a + 10c = \alpha \end{array} \right. \Rightarrow 11a - 6b - 5c = 0$ vérifiée par u_2.

   d'où $P = E_{-1} \oplus E_5$

   cas 2 : $a = c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} (11 - \beta)a - 6b = \alpha \\ 6a - (1 + \beta)b = \alpha \end{array} \right.$ puis $\beta = 5$ et α calculable. $\Rightarrow P$ d'équation $a = c$.

   Les plans P contenant E_5 sont donc $P = E_{-1} \oplus E_5$ et P_1 d'équation $a = c$.

   (b) $(A - 5Id)^2 = \begin{pmatrix} 60 & 0 & -60 \\ 90 & 0 & -90 \\ 24 & 0 & -24 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Ker}(u - 5Id)^2$ a pour équation $a = c$.

   Ainsi $P_1 = \mathrm{Ker}(u - 5Id)^2$.

4. **Cas 1** : $P = P_1 \Rightarrow P \cap P_1 = P_1$
   Cas 2 : $P \neq P_1 \Rightarrow P \cap P_1$ est une droite stable par A, donc $P \cap P_1 = E_\lambda$.
   Comme $E_\lambda \subset \mathrm{Ker}(u - 5Id)^2$, on a nécessairement $\lambda = 5$. Et donc, d'après la question 3, on obtient $P = E_\lambda \oplus E_\mu$.

5. Les sous-espaces vectoriels stables par A sont $\{0\}, E_{-1}, E_5, E_{-1} \oplus E_5, \mathrm{Ker}(u - 5Id)^2$ et E.

Sujet n° 8

Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.

On désigne respectivement par M_f et par V_f les deux réels suivants :

$$M_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad V_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b \big(f(x)-M_f\big)^2\,\mathrm{d}x$$

1) Soient x et x_0 des réels de $[a,b]$. Prouver que :

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \int_a^b |f'(y)|\mathrm{d}y$$

(on pourra distinguer le cas $x \leqslant x_0$ du cas $x_0 < x$).

2.a) À l'aide du signe de la fonction $\lambda \longmapsto \displaystyle\int_a^b \big(|f'(y)|+\lambda\big)^2\,\mathrm{d}y$ définie sur $\mathbf{R}$, établir l'inégalité :

$$\Big(\int_a^b |f'(y)|\,\mathrm{d}y\Big)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b \big(f'(y)\big)^2\,\mathrm{d}y$$

b) En déduire que pour tout $(x,x_0)\in[a,b]^2$, on a :

$$\big(f(x)-f(x_0)\big)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b \big(f'(y)\big)^2\,\mathrm{d}y$$

3.a) Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ (avec $a<b$). Montrer qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que

$$g(x_0) = M_g$$

b) En utilisant entre autre le résultat précédent, établir l'inégalité suivante :

$$V_f \leqslant (b-a)\int_a^b \big(f'(y)\big)^2\,\mathrm{d}y$$

Solution du sujet n° 8

1) Pour $x_0 \leqslant x$:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} f'(y)\,\mathrm{d}y \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f'(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{a}^{b} |f'(y)|\,\mathrm{d}y.$$

(où l'on a utilisé le fait que $x_0 \leqslant x$ pour ordonner les bornes de l'intégrale dans la première inégalité).

Le cas $x < x_0$ est obtenu par un argument de symétrie sur x et x_0.

2.a La fonction est un trinôme du second degré en λ, positif pour tout λ (intégrale d'un carré), donc son discriminant est négatif, ce qui donne l'inégalité voulue.

NB : c'est la démonstration classique dans un cas particulier de l'inégalité de Cauchy Schwarz pour les intégrales (ce résultat n'est pas au programme BL).

b) D'après la question 1), on a :

$$\forall (x, x_0) \in [a,b]^2,\ (f(x) - f(x_0))^2 \leqslant \left(\int_a^b |f'(y)|\,\mathrm{d}y \right)^2 \tag{4.1}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au terme de droite, on obtient :

$$\left(\int_a^b |f'(y)|\,\mathrm{d}y \right)^2 \leqslant \left(\int_a^b 1\,\mathrm{d}y \right) \left(\int_a^b (f'(y))^2\,\mathrm{d}y \right) \leqslant (b-a) \int_a^b (f'(y))^2\,\mathrm{d}y. \tag{4.2}$$

Ce qui permet de conclure en mettant bout à bout les inégalités (4.1) et (4.2).

3.a) Comme g est continue sur $[a,b]$, on peut définir une primitive G de g sur $[a,b]$. La fonction G est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à G, il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que

$$G(b) - G(a) = G'(x_0)(b-a)$$

On conclut donc que :

$$g(x_0) = G'(x_0) = \frac{G(b) - G(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = M_g$$

b) En intégrant l'inégalité (1) par rapport à x sur l'intervalle $[a,b]$, il vient :

$$\forall (x, x_0) \in [a,b]^2,\ \int_a^b (f(x) - f(x_0))^2 \mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2 \int_a^b (f'(y))^2\,\mathrm{d}y$$

Comme $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, on peut appliquer le résultat de la question 3.a). Il existe donc un $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = M_f$. En divisant les deux membres de l'inégalité précédente par $(b-a)$ et en choisissant $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = M_f$, on conclut que :

$$V_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - M_f)^2\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a) \int_a^b (f'(y))^2\,\mathrm{d}y$$

Sujet n° 9

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit N une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}$. Si N vaut n, on procède à une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p = 1 - q \in \,]0,1[$, et on note S et E respectivement les variables aléatoires égales au nombre de succès et d'échecs.

1. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Déterminer la loi de S sachant $[N = n]$, pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire la loi de S, puis la loi de E.
   (c) Les variables aléatoires S et E sont-elles indépendantes ?
2. On revient au cas général où on ne connaît pas la loi de N et on suppose que S et E sont indépendantes.
   (a) Exprimer pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(S = k)$ et $\mathbb{P}(E = j)$ à l'aide de séries.
   (b) Exprimer $\mathbb{P}([S = k] \cap [E = j])$.
   (c) En déduire qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
   $$\forall (k, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \big[(k + j)!\big]\, \mathbb{P}(N = k + j) = u_k\, v_j.$$
   (d) En déduire que N suit une loi de Poisson.

Solution du sujet n° 9

1. (a) On reconnaît que la loi conditionnelle $S \mid (N = n) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

   (b) En conditionnant selon N, la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[\mathbb{P}_{[N=n]}\big((S = k)\big)\,\mathbb{P}(N = n)\Big] = \sum_{n=k}^{+\infty} \left[\binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}\, \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{\lambda^n}{n!}\right]$$
$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, p)^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\, q)^m}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda\, p}\, \frac{(\lambda\, p)^k}{k!}$$

   donc $S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\, p)$ et $E \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\, q)$.

   (c) On a

$$\mathbb{P}\big((S = k) \cap (E = j)\big) = \mathbb{P}\big((S = k) \cap (N = k + j)\big) = \mathbb{P}_{[N=k+j]}\big((S = k)\big)\,\mathbb{P}(N = k + j)$$
$$= \binom{k+j}{k} p^k\, q^j\, \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{\lambda^{k+j}}{(k + j)!} = \mathrm{e}^{-\lambda\, p}\, \frac{(\lambda\, p)^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, q}\, \frac{(\lambda\, q)^j}{j!}$$
$$= \mathbb{P}(S = k)\,\mathbb{P}(E = j)$$

   d'où S et E indépendantes.

2. (a) Comme ci-dessus,

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \left[\binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}\, \mathbb{P}(N = n)\right] \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(E = j) = \sum_{m=j}^{+\infty} \left[\binom{m}{j} p^{m-j}\, q^j\, \mathbb{P}(N = m)\right]$$

   (b) De même :

$$\mathbb{P}\big((S = k) \cap (E = j)\big) = \binom{k+j}{k} p^k\, q^j\, \mathbb{P}(N = k + j)$$

   (c) D 'où par indépendance :

$$\big[(k{+}j)!\big]\,\mathbb{P}(N = k{+}j) = \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \left[\frac{n!}{(n - k)!}\, q^{n-k}\, \mathbb{P}(N = n)\right]\right) \left(\sum_{m=j}^{+\infty} \left[\frac{m!}{(m - j)!}\, p^{m-j}\, \mathbb{P}(N = m)\right]\right) = u_k\, v_j$$

   (d) Le produit $u_k\, v_j$ ne dépend donc que de la valeur de $k + j$; on a alors $\forall k$, $u_k\, v_1 = u_{k+1}\, v_0$ et, comme $v_0 \neq 0$ (somme de termes non tous nuls),

$$u_k = u_0 \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^k \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}(N = k) = \frac{u_k\, v_0}{k!} = \frac{u_0\, v_0}{k!} \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^k$$

   et la somme des probabilités donne $u_0\, v_0 = \mathrm{e}^{-v_1/v_0}$; on a donc, puisque $v_1 \neq 0$ (sinon $N = 0$) $N \hookrightarrow \mathcal{P}\big(v_1/v_0\big)$.

SUJET N$^{\text{O}}$ 10

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x strictement supérieur à 1, on pose :

$$f_n(x) = \ln(x-1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue x, admet une seule solution α_n sur $]1, +\infty[$.

   (b) Calculer $f_{n+1}(\alpha_n)$. En déduire les variations de la suite (α_n), puis montrer qu'elle est convergente.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (b) Déterminer le signe de $f_n\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$.

   (c) En déduire la limite de la suite (α_n).

3. (a) Vérifier que la série de terme général $\dfrac{\alpha_n - 1}{n}$ est convergente.

   (b) Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n - 1}{n} \leqslant 1$.

4. (a) Étudier les variations de f'_{n+1} sur l'intervalle $\left]1, 1 + \dfrac{1}{n+1}\right[$.

   (b) En considérant $\displaystyle\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} f'_{n+1}(t)\mathrm{d}t$, en déduire, que : $\alpha_{n+1} - 1 \leqslant (n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \leqslant \alpha_n - 1$.

   (c) Donner alors la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(\alpha_n - \alpha_{n+1})$.

Solution du sujet n° 10

1. (a) On trouve $f_n'(x) = \dfrac{x^n}{x-1} > 0$, donc f_n est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
Comme de plus $\lim\limits_{x \to 1^+} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, f_n réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $]1, +\infty[$.

   (b) On a $f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) + \dfrac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} = \dfrac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} > 0$. On a donc $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ et comme f_{n+1} est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, on en déduit : $\alpha_n > \alpha_{n+1}$. La suite (α_n) est décroissante.
De plus, la suite (α_n) est minorée (par 1) donc elle est convergente.

2. (a) On montre (IAF par exemple) que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$. Par sommation, on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

   (b) $$f_n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = -\ln(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^k}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 0.$$

   (c) On a donc $f_n\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) > f_n(\alpha_n)$ et comme f_n est strictement croissante, on en déduit : $\alpha_n < 1 + \dfrac{1}{n+1}$. Comme $\alpha_n > 1$, on a par encadrement : $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha_n = 1$.

3. (a) Comme $\alpha_n \in]1, 1 + \dfrac{1}{n+1}[$, on a $0 < \dfrac{\alpha_n - 1}{n} < \dfrac{1}{n(n+1)}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente (série télescopique dont la somme vaut 1, ou terme général inférieur à celui de la série de Riemann de paramètre $2 > 1$), donc la série de terme général $\dfrac{\alpha_n - 1}{n}$ est également convergente.

   (b) D'après ce qui précède, on a : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n - 1}{n} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$.
Par passage à la limite : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n - 1}{n} \leqslant 1$

4. (a) $f_{n+1}'(x) = \dfrac{x^{n+1}}{x-1}$ donc $f_{n+1}''(x) = \dfrac{(n+1)x^n(x-1) - x^{n+1}}{(x-1)^2} = \dfrac{x^n(nx - n - 1)}{(x-1)^2}$.
Sur $\left]1, 1 + \dfrac{1}{n+1}\right[$, on a $x \leqslant \dfrac{n+2}{n+1} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$ donc $f_{n+1}''(x) \leqslant 0$ et f_{n+1}' décroit sur $]1, 1 + \dfrac{1}{n+1}[$.

   (b) On a $\displaystyle\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} f_{n+1}'(t)\mathrm{d}t = f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}$, et d'après la question 3a), on a aussi :
$$(\alpha_n - \alpha_{n+1}) f_{n+1}'(\alpha_n) \leqslant \int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} f_{n+1}'(t)\mathrm{d}t \leqslant (\alpha_n - \alpha_{n+1}) f_{n+1}'(\alpha_{n+1})$$
On en déduit, en remplaçant : $(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \dfrac{{\alpha_n}^{n+1}}{\alpha_n - 1} \leqslant \dfrac{{\alpha_n}^{n+1}}{n+1} \leqslant (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \dfrac{{\alpha_{n+1}}^{n+1}}{\alpha_{n+1} - 1}$
Par stricte décroissance et stricte positivité de (α_n), on obtient $(n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \leqslant \alpha_n - 1$ pour l'inégalité de gauche, et $(n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \geqslant (\alpha_{n+1} - 1) \dfrac{\alpha_n^{n+1}}{\alpha_{n+1}^{n+1}} \geqslant \alpha_{n+1} - 1$ pour celle de droite.
Conclusion : $\alpha_{n+1} - 1 \leqslant (n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \leqslant \alpha_n - 1$.

   (c) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_{n+1} = 1$, on a par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 0$, et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 0$, on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} n(\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 0$.

CHAPITRE

5

EXEMPLES DE QUESTIONS COURTES

Question sans préparation 1

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit (λ_n) une suite monotone strictement positive. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ_n . Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Question sans préparation 2

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction d'une variable réelle F définie par

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

2. Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Question sans préparation 3

Soit X une variable aléatoire positive, qui admet une espérance, de densité f définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(X > t)\ dt.$

Question sans préparation 4

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que $A^2(A - I_n) = 0$ et $A(A - I_n) \neq 0$.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

Question sans préparation 5

Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, qui suivent toutes la même loi telle que $E(X_n) = V(X_n) = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Pour tout entier $n > t$, comparer les événements $(T_n < t)$ et $(|T_n - n| \geqslant n - t)$.
2. Calculer $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (T_n < t)\right)$.

Question sans préparation 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini , pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par : $\varphi(M) = {}^tM$.

Déterminer la trace d'une matrice représentative de φ.

Question sans préparation 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Trouver des solutions de l'équation $X^6 = A$, où $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A-t-on unicité de la solution lorsque celle ci existe ?

Question sans préparation 8

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout entier naturel n non nul, Z_n suit la loi $\gamma(n)$.
Montrer que la suite $\left(\dfrac{Z_n - n}{\sqrt{Z_n}}\right)$ converge en loi et préciser la loi limite.

Question sans préparation 9

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''(t)\mathrm{d}t$ soient convergentes.
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Question sans préparation 10

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$.

1. Expliciter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(u) = \int_0^1 \Big[\max(x, u)\Big] \,\mathrm{d}x$$

2. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Comparer

$$J = \mathbb{E}\left(\int_0^1 \max(x, U) \,\mathrm{d}x\right) \quad \text{et} \quad I = \int_0^1 \mathbb{E}\big(\max(x, U)\big) \,\mathrm{d}x$$