

Rapport de correction BL. Concours 2022.

Remarques sur le sujet.

Le sujet était constitué de deux exercices et d'un problème indépendants entre eux, traitant de thèmes distincts du programme de première et de deuxième année, en analyse, en algèbre linéaire et en probabilité. Les exercices et le problème étaient de difficulté graduelle et comportaient chacun des questions élémentaires, relativement bien guidées, visant à récompenser et encourager tout candidat sérieux ayant travaillé son cours. Le sujet comportait aussi des questions plus ambitieuses et plus techniques permettant de valoriser les meilleures copies et les candidats faisant preuve d'initiative personnelle.

Les parties les plus abordées ont été :

- l'exercice 1 (études de fonction)
- le début de l'exercice 2 (étude d'une densité de probabilité.)
- la Partie I-A du problème (diagonalisation guidée d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) et le début de la Partie I-B.

A l'inverse, les parties les moins abordées ont été :

- la dernière question de l'exercice 1 (calcul de la somme de la série)
- la seconde moitié de l'exercice 2 (questions 5 et 6)
- la Partie II du problème.

Les candidats doivent garder à l'esprit que les questions sont liées entre elles et doivent penser à utiliser les résultats précédents. Il était tout à fait possible d'admettre un résultat afin de poursuivre. Il faut alors l'indiquer clairement.

Il est également possible de traiter les exercices dans l'ordre que l'on veut. Sans abuser de cette pratique, il est aussi possible de passer une question puis d'y revenir ensuite, mais il faut alors respecter avec soin la numérotation des questions et l'indiquer très clairement afin que le jury puisse facilement identifier de quelle question il s'agit. Une présentation confuse et disparate, comprenant de trop nombreux aller retour, n'est pas dans l'intérêt du candidat. La confusion dans la forme va souvent de pair avec la confusion dans le fond.

Remarques générales sur les copies.

Dans leur immense majorité, les copies sont lisibles, rédigées avec soin, dans un français correct, sans abréviation. Les résultats sont presque toujours encadrés. On rappelle l'importance de soigner la présentation, l'écriture et la rédaction. Les quelques rares copies rédigées comme des "brouillons" font une impression très négative au jury et n'encourage pas le correcteur à la bienveillance.

Sur le fond, on observe une progression de niveau par rapport à l'an dernier, avec davantage de contenu et une quasi disparition des copies "vides". On peut donc saluer le sérieux et la combativité des candidats.

L'ensemble reste cependant très hétérogène, avec un écart type des notes élevé.

- Une minorité de copies (environ 10–15%) révèle de graves lacunes de cours et de calcul: erreurs dans les formules de dérivation (avec, par exemple, des confusions entre la dérivée d'une somme et la dérivée d'un produit !), erreur dans la caractérisation d'une densité de probabilité, incapacité à prouver qu'un réel donné est une valeur propre d'une matrice de taille 3, incapacité à trouver une base d'un sous espace propre de cette même matrice, confusion entre matrice diagonalisable et matrice symétrique.... Certaines difficultés relèvent de lacunes de lycée, notamment lorsqu'il s'agit de tracer un tableau de variations, de calculer une limite qui ne présente aucune subtilité ou de trouver une primitive relativement simple dans le cadre d'un calcul intégral. On ne peut qu'encourager les futurs candidats à s'entraîner à mener des calculs simples.

- Heureusement, la majorité des candidats semble désormais maîtriser les bases du cours. Outre ces connaissances fondamentales, sont aussi valorisés la rigueur de la rédaction et l'honnêteté du raisonnement. On préférera en effet un raisonnement partiel mais juste, qu'un raisonnement qui conclut à l'aide d'arguments erronés et abusifs.

- On trouve également de bonnes, voire de très bonnes copies montrant une excellente compréhension des outils et des thèmes du programme. Les candidats les plus rapides et les plus efficaces ont réussi à aborder les questions les plus délicates et les plus abstraites de la fin du problème.

Exercice 1.

Cet exercice d'analyse, relativement élémentaire et classique, traitait d'études de fonctions et de suites et se terminait par le calcul de la somme d'une série (la série harmonique alternée).

Question 1: cette question relève de connaissances de lycée. Certains candidats donnent un changement de variations de la fonction h_n en une valeur dépendant de x , la variable.

Question 2: on attend des arguments précis pour établir l'existence et l'unicité de x_0 .

Question 3(a): il faut penser que les questions sont liées entre elles.

Question 3(b): il ne faut pas donner des limites en contradiction avec le tableau de variations, ou alors s'inquiéter de cette incohérence et refaire les calculs.

Question 5(a): de nombreuses copies ont donné des valeurs de a , b et c "devinées" mais ont oublié de vérifier l'unicité.

Questions 5(b), (c) et 6(b): les propriétés de l'intégrale utilisées (croissance, linéarité) doivent être citées. Pour la croissance, on attend de rappeler les hypothèses.

Question 6(c): beaucoup de candidats font tendre n vers $+\infty$ directement à l'intérieur de l'intégrale.

Exercice 2.

Cet exercice, lui aussi assez guidé, traitait du chapitre "variables aléatoires à densité". Dès les premières questions, les correcteurs ont pu repérer d'assez graves lacunes de cours: comment prouver que f est une densité de probabilité, comment trouver la fonction de répartition à partir d'une densité, comment calculer l'espérance (resp. la variance) d'une somme...

On rappelle que l'on doit citer les résultats de cours que l'on utilise (par exemple la linéarité de l'espérance) et vérifier les hypothèses d'un théorème avant de l'utiliser (par exemple, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Question 1: deux problèmes majeurs ont été identifiés dans les copies. Le premier consiste à ne pas connaître les critères à vérifier pour prouver que f est une densité de probabilité. Le second, plus technique, consiste à ne pas savoir trouver une primitive de f ou à donner une primitive fausse.

Question 2(a): même problème technique que dans la question précédente.

Question 2(b): question très peu abordée. Peu de candidats connaissent la définition du quantile d'ordre q . La définition apparaît pourtant au programme officiel.

Question 3(a): toujours des problèmes techniques dans le calcul intégral.

Question 4(a): question classique consistant à trouver la loi du maximum (resp. minimum), avec, en prime, des indications dans l'énoncé.

Question 5(b): question demandant de redémontrer une formule classique, sans doute vue en cours. Cette question a été souvent abordée et assez souvent réussie.

Question 6(a): autre question classique demandant le calcul de l'espérance et de la variance de la moyenne empirique. Question souvent abordée, assez souvent réussie.

Question 6(b): question très rarement abordée. À quelques exceptions près, les rares candidats qui l'ont abordée se sont contentés de rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, mais en omettant les hypothèses.

Problème.

Le problème, en deux parties, traitait dans un premier temps d'algèbre linéaire (diagonalisation guidée d'une matrice de taille 3, puis généralisation à une matrice de taille n), puis proposait l'étude d'un espace probabilisé de matrices dont les coefficients étaient des variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli.

La majorité des copies a abordé la Partie I-A qui faisait revoir les méthodes de diagonalisation pour une matrice de taille 3.

Question 1: généralement réussie.

Question 2: assez bien réussie (sauf quelques copies folkloriques). Pour conclure que l'on a trouvé une base, il faut dire que la famille trouvée est génératrice et libre.

Question 3: le lien avec la question précédente n'a pas semblé évident pour les candidats. C'est donc un point de cours à revoir.

Question 4: il est maladroit de passer par un pivot de Gauss. Vérifier que $A + I_3$ est non inversible est ici plus judicieux. Là encore, on rappelle aux candidats qu'une base est une famille à la fois génératrice et libre. Peu ont su dire que la famille génératrice qu'ils avaient déterminée était libre.

Question 5: question vérifiant les connaissances de cours. A priori l'argument "toute matrice symétrique réelle est diagonalisable" ne fait pas partie du programme officiel et n'est donc pas recevable.

Question 6: souvent réussie.

Question 7: le théorème du rang est le plus souvent bien cité. En déduire une valeur propre pour M_n a posé les mêmes problèmes qu'à la question 3.

Question 8: beaucoup de copies oublient de vérifier que les deux vecteurs donnés appartiennent à l'image de M_n .

Question 9: question classique, qui a été soit bien réussie, soit complètement râtée en passant par des calculs compliqués et vains.

Question 10: question réussie par les meilleures copies.

Question 11: question souvent abordée et souvent réussie.

Question 12: là encore, l'argument " M_n est symétrique réelle, donc diagonalisable" n'est pas recevable car n'appartenant pas au programme officiel.

Questions 13, 14 et 15: questions réussies par les meilleures copies.

Question 16: les candidats donnent souvent deux matrices, sans justifier.

Question 17: la réponse étant donnée, on attend une démonstration précise et rigoureuse.

Question 18: confusion trop fréquente entre loi de Bernoulli et loi binomiale. A défaut d'avoir trouvé le bon paramètre, donner les formules de l'espérance et de la variance rapportait quand même des points.

Question 19: question souvent réussie quand elle a été abordée.

Question 20: la réponse étant donnée, on attend une démonstration précise et rigoureuse.

Question 21: question étrangement assez râtée car les candidats n'ont pas pensé à utiliser les résultats précédents.

Question 22: l'inégalité de Markov est généralement rappelée... sans aucune hypothèse ! Cet oubli fait perdre des points.

Question 23: question assez bien réussie, les rares fois où elle a été abordée.

Question 24: question peu abordée.

Question 25: le lemme des coalitions peut être cité, mais il n'est pas exigible.

Question 26: l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est généralement rappelée... sans aucune hypothèse !

Question 27: question peu abordée.

Question 28: des candidats "malins" ont su prendre les points dans cette dernière question d'observation et de synthèse.

Conseils aux futurs candidats.

- mener un travail assidu et régulier en mathématiques ciblé sur le cours: s'assurer une parfaite connaissance des définitions et savoir mettre en oeuvre les principaux théorèmes.
- s'entraîner à mener des calculs (calcul d'intégrales, calcul de dérivées, calculs de limites, recherche de primitives, recherche de bases d'espace vectoriels...)
- lire dès le début tout le sujet, repérer les parties que l'on sait traiter et gérer au mieux son temps.
- soigner la qualité de la rédaction et de l'argumentation, sans pour autant détailler à l'excès.
- privilégier la rigueur et la précision et éviter la paraphrase un peu vague ou pire les arguments abusifs.
- acquérir une distance critique vis à vis de ses résultats: limites en contradiction avec les variations de la fonction, variance strictement négative, fonction de répartition d'une variable à densité clairement discontinue...

En conclusion, on rappelle qu'il n'est nul besoin de faire les questions très difficiles pour avoir une note plus que convenable et que seule la méconnaissance manifeste du cours et des techniques fondamentales (étude de fonction, étude des valeurs propres, étude d'une densité, calcul d'une espérance...) fait drastiquement chuter la note.