# Rapport et sujets, oral HEC, Mathématiques (BL)

Juin-juillet 2022

Le bilan de la session 2022 de mathématiques voie BL est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 3 et 18. La moyenne s'établit à 10,23 et l'écart-type à 3,78.

Le jury a fortement apprécié les qualités d'expression et la finesse de raisonnement de certains candidats qui ont fait forte impression.

Par contre certains candidats nous ont semblé approximatifs, au niveau du calcul, mais surtout au niveau de la connaissance des théorèmes du cours.

Le jury aimerait insister sur les points suivants :

— La question de cours n'est pas à négliger. Il faut y répondre précisément.

— Il ne faut pas utiliser de "souvenirs flous " d'exercices vus en classe mais bien répondre aux questions posées en utilisant les outils et théorème du programme.

— Le calcul intégral, même élémentaire a pu poser certains soucis aux candidats.

— On a pu noter certains confusions entre fonction de répartition et densité chez certains candidats.

Pour terminer sur une note positive, soulignons la combattivité des candidats, qui s'est particulièrement exprimée lors des questions sans préparation, où certains ont pu redresser une situation bien compromise.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, qu'ils ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

# SUJET BL1

## Exercice principal BL1

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice, on note $M^T$ sa transposée.
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $MM^T = I_n$.
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si $M^T = M$.
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si $M^T = -M$.
On confond dans la suite $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$ que l'on munit de son produit scalaire canonique noté $\langle .,. \rangle$ et de la norme associée notée $\|.\|$.

1. Question de cours : rappeler la définition d'une matrice inversible.
2. (a) Montrer que toute matrice orthogonale est inversible.
   (b) Soit $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Préciser pour quelle(s) valeur(s) de l'entier $k \in \mathbb{N}$, la matrice $V^k$ est orthogonale.
3. Soit $A$ une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $M = I_n + A$ et $N = I_n - A$.
   (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer $(X^TAX)^T$ et en déduire la valeur de $X^TAX$.
   (b) Montrer que la seule valeur propre possible pour $A$ est 0. Dans quel cas la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
   (c) Montrer que les matrices $M$ et $N$ sont inversibles.
   (d) Montrer que les matrices $M$ et $N^{-1}$ commutent.
   (e) Montrer que la matrice $\Omega = MN^{-1}$ est orthogonale.
   (f) $-1$ est-il valeur propre de $\Omega$ ?
4. Soit $U$ une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'admettant pas $-1$ comme valeur propre.
   Montrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$U = (I_n + B)(I_n - B)^{-1}.$$

---

**Solution :**

1. Le programme officiel dit que $A$, matrice carrée d'ordre $n$, est inversible si et seulement si le système $AX = Y$ admet une solution pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou encore si et seulement si il existe une matrice $B$ telle que $AB = BA = I_n$. Dans ce cas, $B$ est l'inverse de $A$.
   Le programme précise aussi (page 9) que toute matrice inversible à droite (resp. à gauche) est inversible.
2. (a) D'après la question 1, si $M$ est une matrice orthogonale, elle est inversible et son inverse est : $M^{-1} = M^T$.
   (b) Pour $k = 0$, $V^0 = I_4$ qui est orthogonale.
   Pour $k = 1$, on a bien $VV^T = I_4$, donc $V$ est orthogonale et ainsi toutes les matrices $V^k$ sont orthogonales.
3. (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   D'une part, comme $A$ est antisymétrique,

$$(X^TAX)^T = X^TATX = -X^TAX.$$

   D'autre part, comme $X^TAX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ (confondu avec un réel), $X^TAX$ est égal à sa transposée, donc

$$(X^TAX)^T = X^TAX.$$

   On déduit de ces deux égalités que $X^TAX = 0$.
   (b) • Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A$ et soit $X$ un vecteur propre associé :

$$0 = X^TAX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2.$$

   Comme $X$ n'est pas le vecteur nul, sa norme n'est pas nulle et $\lambda = 0$. La seule valeur propre possible pour $A$ est 0 et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$.
   • Si le spectre de $A$ est vide, $A$ n'est pas diagonalisable (dans le programme officiel, rien n'assure que le spectre complexe n'est pas vide.) Dans le cas où sa seule valeur propre est 0, $A$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est la matrice nulle (résultat à démontrer par le candidat).

(c) Comme 1 n'est pas valeur propre de $A$, la matrice $N = I_n - A$ est inversible.
Comme $-1$ n'est pas valeur propre de $A$, la matrice $M = I_n + A$ est inversible. $M$ et $N$ commutent en tant qu'expression polynomiale en $A$. En effet,

$$MN = (I_n + A)(I_n - A) = I_n - A^2 = (I_n - A)(I_n + A) = NM.$$

Si $M$ commute avec $N$, $M$ commute avec son inverse. En effet, par associativité du produit matriciel :

$$MN^{-1} = \underbrace{(N^{-1}N)}_{=I_n} MN^{-1} = N^{-1}(NM)N^{-1} = N^{-1}(MN)N^{-1} = N^{-1}M(NN^{-1}) = N^{-1}M.$$

(d) Par propriété de la transposition,

$${}^t\Omega\Omega = {}^t(MN^{-1})(MN^{-1}) = {}^t(N^{-1})M^T MN^{-1} = ({}^tN)^{-1} M^T MN^{-1}.$$

Or, comme $A$ est antisymétrique,

$${}^tM = {}^t(I_n + A) = I_n - A = N$$

et

$${}^tN = {}^t(I_n - A) = I_n + A = M.$$

Donc, comme $M$ et $N$ commutent,

$${}^t\Omega\Omega = M^{-1}NMN^{-1} = M^{-1}MNN^{-1} = I_n.$$

Annsi, $\Omega$ est une matrice orthogonale.

(e) On raisonne par l'absurde en supposant que $-1$ est une valeur propre de $\Omega$. Il existe donc un vecteur colonne $X$ non nul tel que

$$-X = \Omega X = MN^{-1}X.$$

Comme $M$ et $N^{-1}$ commutent, on obtient

$$-X = N^{-1}MX.$$

On multiplie par $N$ :

$$MX = -NX$$

soit encore

$$(I_n + A)X = -(I_n - A)X = (A - I_n)X.$$

Il suit que $X = 0$, ce qui est une contradiction.
Donc, $-1$ n'est pas valeur propre de $\Omega$.

4. On raisonne par analyse synthèse.
• Supposons qu'une telle matrice $B$ existe. Alors,

$$U(I_n - B) = I_n + B$$

d'où l'on tire

$$(U + I_n)B = U - I_n$$

Comme $-1$ n'est pas valeur propre de $U$, alors $U + I_n$ est inversible et

$$B = (U + I_n)^{-1}(U - I_n).$$

Ainsi, si la matrice $B$ existe, elle est unique.
• Posons réciproquement

$$B = (U + I_n)^{-1}(U - I_n).$$

$\star$ Il faut vérifier que $B$ est antisymétrique.

$${}^tB = {}^t((U + I_n)^{-1}(U - I_n)) = {}^t(U - I_n)\,{}^t((U + I_n)^{-1}) = {}^t(U - I_n)\,({}^t(U + I_n))^{-1}.$$

Comme $U$ est orthogonale, ${}^tU = U^{-1}$, donc

$${}^tB = (U^{-1} - I_n)\,(U^{-1} + I_n)^{-1} = (I_n - U)U^{-1}\,U\,(I_n + U)^{-1} = (I_n - U)(I_n + U)^{-1}.$$

Comme $I_n - U$ et $I_n + U$ commutent, alors $I_n - U$ et $(I_n + U)^{-1}$ commutent, si bien que

$$^tB = (I_n + U)^{-1}(I_n - U) = -(U + I_n)^{-1}(U - I_n) = -B.$$

Donc, $B$ est antisymétrique.
⋆ Il faut également vérifier que

$$(I_n + B)(I_n - B)^{-1} = U$$

On a

$$B = (U + I_n)^{-1}(U - I_n)$$

donc

$$(U + I_n)B = (U - I_n)$$

En développant,

$$U(I_n - B) = I_n + B$$

donc

$$(I_n + B)(I_n - B)^{-1} = U.$$

La matrice $B$ répond donc à la question.

# Exercice sans préparation BL1

Soit $c$ un réel strictement positif. On note $v$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$v(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}}{x\ln 4} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On admet que $v$ est une fonction densité de probabilité, et on note $X$ une variable aléatoire de densité $v$.

1. Montrer que $X$ admet une espérance et calculer sa valeur.
2. On note $Y = \sqrt{X}$. On admet que $Y$ est une variable à densité.
   Montrer que $Y$ admet une espérance et une variance et donner leurs valeurs.

---

**Solution :**

1. $v$ est nulle sur $\mathbb{R}_-$ donc $X$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} xv(x)\,dx$ converge.
   Or, si $\lambda$ est un réel strictement positif, le cours sur les lois exponentielles nous permet d'affirmer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$ converge et vaut 1.
   Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-c^2x}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4c^2x}\,dx$ convergent et valent respectivement $\dfrac{1}{c^2}$ et $\dfrac{1}{4c^2}$.
   Ainsi, d'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln 4}\left(e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}\right)dx$ converge.
   Donc $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = \dfrac{3}{4c^2\ln 4}}$.
2. $Y^2 = X$ et $X$ admet une espérance, donc $Y$ admet un moment d'ordre 2, donc une espérance et une variance.
   On note $F_Y$ la fonction de répartition de $Y$ et $f_Y$ une densité de $Y$.
   $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(\sqrt{X} \leqslant x) = 0$
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F_Y(x) = P(\sqrt{X} \leqslant x) = P(X \leqslant x^2) = F_X(x^2)$
   Ainsi, pour $x > 0, F_Y'(x) = 2xF_x'(x^2) = 2xv(x^2)$
   Une densité de $Y$ est donc :
   $$f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x\ln 2} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
   $E(Y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xf_Y(x)\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int_0^{+\infty} e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}\,dx$
   Or $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^{-c^2x^2} = e^{-\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}cx)^2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{c} \times \left(\dfrac{c\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}cx)^2}\right)$
   et $x \mapsto \dfrac{c\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}cx)^2}$ est une densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres 0 et $\sigma = \dfrac{1}{c\sqrt{2}}$.
   Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2x^2} = 1$
   Par parité, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2x^2} = \frac{1}{2}$ et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-c^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2c}}$.
   De la même façon, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4c^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4c}}$.
   $E(Y) = \dfrac{1}{\ln 2}\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2c} - \dfrac{\sqrt{\pi}}{4c}\right)$
   $$\boxed{E(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{4c\ln 2}}$$

Enfin, d'après la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\
&= E(X) - E(Y)^2 \\
&= \frac{3}{4c^2 \ln 4} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4c \ln 2}\right)^2 \\
&= \frac{6 \ln 2 - \pi}{16c^2 (\ln 2)^2}
\end{aligned}$$

# SUJET BL2

## Exercice principal BL2

Soit $p$ un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$.

1. (a) Question de cours : rappeler les résultats de cours sur la convergence des séries de Riemann.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}(T_n) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{T_n}{\ln(n)}\right) = 1.$$

2. Etudier la nature de la série de terme général $u_n$.
3. On suppose dans toute la suite que $p$ est supérieur ou égal à 2 et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$

   (a) Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+p+2)\, u_{n+2} = (n+2)\, u_{n+1}.$$

   (b) En vous servant d'une somme telescopique, en déduire une formule pour $S_n$ en fonction de $n$, $p$ et $u_n$.
4. Déterminer, dans les cas de convergence, la somme de la série de terme général $u_n$ en fonction de $p$.

---

**Solution :**

1. (a) Voir le programme officiel page 6 : si $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $t \in [k, k+1]$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

   On intègre cette série d'inégalités pour $t$ variant de $k$ à $k+1$, ce qui donne

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k}$$

   donc

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

   *Remarque :* on pouvait aussi obtenir ce résultat en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction ln entre les points $k$ et $k+1$.
   Puis on somme pour $k$ allant de 1 à $n-1$ :

$$T_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant T_n - \frac{1}{n}$$

   ce qui donne

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant T_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

   On conclut par théorème d'encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty}(T_n) = +\infty.$$

   De plus, en divisant par $\ln(n) > 0$ pour $n \geqslant 2$, on trouve

$$1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{T_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

   Par théorème d'existence de limite par encadrement, on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{T_n}{\ln(n)}\right) = 1.$$

2. • Si $p = 0$, on a $u_n = \dfrac{1}{\binom{n}{n}} = 1$ donc la série diverge grossièrement puisque son terme général ne tend pas vers 0.

• Si $p = 1$, on a $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+1}{n}} = \dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$ . La série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge aussi.
• Si $p \geqslant 2$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{p!}{n^p}$$

En utilisant une comparaison avec une série de Riemann, nous en déduisons que $\sum u_n$ converge.

3. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+p+2)\, u_{n+2} = \frac{n+p+2}{\frac{(n+p+2)!}{(n+2)!(p)!}} = \frac{(n+2)\,(p)!\,((n+1)!)}{(n+p+1)!}$$

On en déduit que

$$(n+p+2)\, u_{n+2} \quad = \quad (n+2)\, u_{n+1}$$

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(p-1)u_{n+2} = (n+2)\, u_{n+1} - (n+3)\, u_{n+2}$$

$$(p-1)\sum_{k=0}^{n-2} u_{k+2} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)\, u_{k+1} - (k+3)\, u_{k+2} = 2u_1 - (n+1)u_n$$

$$(p-1)(S_n - u_1) = 2u_1 - (n+1)u_n \Rightarrow S_n = \boxed{\frac{1}{p-1} - \frac{n+1}{p-1}u_n}$$

4.

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{p!}{n^p} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{n+1}{p-1}u_n \leqslant p(p-2)!\left(\frac{1}{n^p} + \frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

Par encadrement la suite $(\dfrac{n+1}{p-1}u_n)$ tend vers 0 et donc la somme de terme général $u_n$ vaut $\dfrac{1}{p-1}$.

# Exercice sans préparation BL2

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ paire et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $X^2$ suit la loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

1. On note $F_X$ la fonction de répartition de $X$. Montrer que pour tout réel $x, F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.
2. Déterminer $f$. $X$ admet-elle une espérance ?

---

**Solution :**

1. $f$ étant paire, on a pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} F_X(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ on effectue le changement de variable } u = -t \\ &= \int_{+\infty}^{x} f(-u)(-\,\mathrm{d}u) \\ &= \int_{x}^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u \text{ par parité de } f \\ &= 1 - F_X(x). \end{aligned}$$

2. Soit $x \geqslant 0$ :

$$F_{X^2}(x^2) = P(X^2 \leqslant x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = F_X(x) - F_X(-x) = 2F_X(x) - 1$$

Or $X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$ donc pour tout réel $y \geqslant 0$, $F_{X^2}(y) = 1 - e^{-ay}$.

Ainsi : $\forall x \geqslant 0, 2F_X(x) - 1 = 1 - e^{-ax^2} \Leftrightarrow \boxed{F_X(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-ax^2}}$.

On en déduit que pour tout $x \leqslant 0$, $\boxed{F_X(x) = \frac{1}{2}e^{-ax^2}}$

Enfin, $f$ est donnée par la dérivée de $F_X$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on en déduit :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -ax\mathrm{e}^{-ax^2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ ax\mathrm{e}^{-ax^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

$X$ admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Or $f$ est paire donc $x \mapsto xf(x)$ est impaire, donc pour tout $A > 0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^A xf(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^A ax^2e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[ -\frac{1}{2}xe^{-ax^2} \right]_0^A - \int_0^A -\frac{1}{2}e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x \text{ par intégration par parties} \\ &= -\frac{1}{2}Ae^{-aA^2} + \frac{1}{2}\int_0^A e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or $\varphi : x \mapsto \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-ax^2}$ est la densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma^2 = \frac{1}{2a}$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1, et par parité de $\varphi$, $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Ainsi :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A xf(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Donc $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Or $x \mapsto xf(x)$ est impaire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge. $\boxed{E(X) \text{ existe et vaut } 0.}$

Bonus : $X$ admet une variance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Or $X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$ donc $X^2$ admet une espérance, ce qui prouve la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}$.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{a}$$

# SUJET BL3

## Exercice principal BL3

1. Question de cours : Fonction de répartition et densité d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

2. $\lambda$ désigne un réel strictement positif. On considère la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \begin{cases} \lambda^2 x \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

   (a) Montrer que $h$ peut être considérée comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire $X$.

   (b) Montrer que $X$ admet une espérance et la calculer.

3. Dans cette question, on considère une variable aléatoire $Y$ de densité $f$, nulle sur $]-\infty;0[$, continue sur $[0;+\infty[$ et strictement positive sur $[0;+\infty[$. On note alors $F$ la fonction de répartition de $Y$.

   (a) Justifier que pour tout réel $x$, on a $1 - F(x) > 0$.

   On définit alors la fonction $g$ par : $g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln(1-F(x)) \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

   (b) Montrer que $g$ peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire $Z$.

   (c) Vérifier que la variable aléatoire $Y$ suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ (avec $\lambda > 0$) vérifie les conditions imposées dans la question 3. Montrer alors que $Z$ suit la même loi que $X$.

---

**Solution :**

1. Si $U \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors :
   $F_U(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ et une fonction densité de probabilité est : $f_U(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

2. (a) Une variable aléatoire $T$ suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ admet pour densité :
   $f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   $T$ admet une espérance donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$. Ainsi :
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^{+\infty} \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\lambda \times \dfrac{1}{\lambda} = 1$.
   $h$ est constante nulle sur $]-\infty;0]$, donc $h$ est bien continue et positive sur cet intervalle. Comme produit de fonctions positives et continues sur l' intervalle $[0;+\infty[$, la fonction $h$ est bien continue et positive sur cet intervalle. Donc $h$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.
   $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x = 0$
   D'après ce qui précède, $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = 1$
   D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = 1$
   Donc $h$ est bien une densité de probabilité.

   (b) Soit $X$ une variable aléatoire de densité $h$. $X$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)\,\mathrm{d}x$ converge ssi $\displaystyle\int_0^{+\infty} xh(x)\,\mathrm{d}x$ converge
   En nous servant du moment d'ordre 2, d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre

$\lambda$, nous savons que cette dernière intégrale converge et que $X$ admet une espérance.
De plus

$$E(X) = \lambda E(T^2) = \lambda(V(T) + E(T)^2) = \frac{2}{\lambda}$$

3. (a) $f$ est strictement positive sur $[0; +\infty[$ donc $F$ est strictement croissante sur cet intervalle. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, donc pour tout réel positif $x, F(x) < 1$, donc $1 - F(x) > 0$. $F$ étant nulle sur $]-\infty; 0[$, ce résultat est vrai sur $\mathbb{R}$.

(b) D'après ce qui précède, pour tout réel $x$ positif, $0 < 1 - F(x) \leqslant 1$ donc $\ln(1 - F(x)) \leqslant 0$. $f$ est une fonction densité donc $f$ est positive, et ainsi : $\forall x \geqslant 0, -f(x)\ln(1 - F(x)) \geqslant 0$.
$f$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$, $g$ est continue sur cet intervalle.
$g$ est nulle sur $]-\infty; 0[$ donc $g$ est bien continue positive sur cet intervalle.
$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$
Soit $A > 0$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^A g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^A -f(x)\ln(1 - F(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\ -F(x)\ln(1 - F(x))\ \Big]_0^A - \int_0^A \frac{F(x)f(x)}{1 - F(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -F(A)\ln(1 - F(A)) + \int_0^A \frac{(1 - F(x))f(x)}{1 - F(x)} - \frac{f(x)}{1 - F(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -F(A)\ln(1 - F(A)) + \int_0^A f(x) - \frac{f(x)}{1 - F(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -F(A)\ln(1 - F(A)) + \Big[\ F(x) + \ln(1 - F(x))\ \Big]_0^A \\
&= -F(A)\ln(1 - F(A)) + F(A) + \ln(1 - F(A)) \\
&= (1 - F(A))\ln(1 - F(A)) + F(A)
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty}(1 - F(A)) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_0^A g(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty} F(A) = 1$. D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.
$g$ définit bien une densité de probabilité.

(c) $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Une densité de $Y$ est : $f_Y(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$
$f_Y$ est bien nulle sur $\mathbb{R}^-$, continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$.
$F_Y(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$
$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\ln(\mathrm{e}^{-\lambda x}) = \lambda^2 x \mathrm{e}^{-\lambda x} = h(x)$
Donc $Y$ suit la même loi que $X$.

# Exercice sans préparation BL3

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la probabilité que $A$ soit inversible.
2. Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les variables aléatoires égales aux valeurs propres de $A$. Calculer $\mathrm{Cov}(\lambda_1, \lambda_2)$.

---

**Solution :**

1. Pour tout $\omega \in \Omega$, la matrice $A(\omega)$ est inversible si et seulement si $\det(A(\omega)) = X^2(\omega) - Y^2(\omega) \neq 0$.
   Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$,
   $$X^2(\omega) \neq Y^2(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega) \neq Y(\omega).$$
   Soit $E$ l'événement "$A$ est inversible". Alors
   $$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y).$$
   En posant $q = 1 - p$, on trouve, par indépendance de $X$ et de $Y$,
   $$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X = k) \cap (Y = k)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 (q^2)^{k-1} = \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p}{1+q}.$$
   On conclut que
   $$\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{p}{1+q} = \frac{2-2p}{2-p}.$$
2. Pour tout $\omega \in \Omega$, $\lambda(\omega)$ est valeur propre de $A(\omega)$ si et seulement si la matrice
   $$A(\omega) - \lambda(\omega) I_2 = \begin{pmatrix} X(\omega) - \lambda(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) - \lambda(\omega) \end{pmatrix}$$
   est inversible. Par calcul du déterminant de $\begin{pmatrix} X(\omega) - \lambda(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) - \lambda(\omega) \end{pmatrix}$, on trouve deux valeurs propres
   $$\lambda_1(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) \qquad \text{et} \qquad \lambda_2(\omega) = X(\omega) - Y(\omega).$$
   Ainsi,
   $$\lambda_1 = X + Y \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = X - Y.$$
   D'où,
   $$\mathrm{Cov}(\lambda_1, \lambda_2) = \mathrm{Cov}(X + Y, X - Y) = \mathrm{V}(X) - \mathrm{V}(Y) = 0.$$
   On ne peut cependant pas en déduire que les variables $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont indépendantes. Au contraire, les variables ne sont pas indépendantes... Un candidat rapide pourra essayer de le démontrer.

# SUJET BL4

## Exercice principal BL4

On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2. On définit les fonctions $e_0, e_1, e_2$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e_0(t) = 1,\ e_1(t) = t \text{ et } e_2(t) = t^2$$

On rappelle que la famille $(e_0, e_1, e_2)$ est une base de $E$. On considère l'application $\varphi$ qui, à toute fonction $P$ de $E$, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(P)(x) = \int_0^1 P(x+t)dt$$

1. Question de cours : Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire.
2. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.
3. (a) Ecrire la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base $(e_0, e_1, e_2)$.
   (b) Justifier que $\varphi$ est un automorphisme de $E$.
   (c) L'endomorphisme $\varphi$ est-il diagonalisable ?
4. (a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, il existe un réel $u_n$ tel que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Donner $u_0$ et exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
   (b) En déduire, par sommation, l'expression de $u_n$ pour tout entier $n$.

---

**Solution :**

1. Question de cours : Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
2. — Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P$ et $Q$ deux éléments de $E$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\alpha P + Q)(x) = \int_0^1 (\alpha P + Q)(x+t)dt = \int_0^1 (\alpha P(x+t) + Q(x+t))dt = \alpha \int_0^1 P(x+t)dt + \int_0^1 Q(x+t)dt$
   On a donc bien , $\varphi(\alpha P + Q) = \alpha\varphi(P) + \varphi(Q)$ donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$
   — Pour tout réel $x$ :
   $\varphi(e_0)(x) = \int_0^1 e_0(x+t)dt = \int_0^1 1dt = 1$
   $\varphi(e_1)(x) = \int_0^1 e_1(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)dt = \left[\ xt + \frac{t^2}{2}\ \right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$
   $\varphi(e_2)(x) = \int_0^1 e_2(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)^2dt = \int_0^1 x^2 + 2xt + t^2dt = \left[\ x^2.t + x.t^2 + \frac{t^3}{3}\ \right]_0^1 = x^2 + x + \frac{1}{3}$
   Par conséquent : $\boxed{\varphi(e_0) = e_0,\ \varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1 \text{ et } \varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2\ .}$
   Par linéarité, quelque soit $P$ appartenant à $E$, $\varphi(P)$ est une combinaison linéaire de $e_0, e_1, e_2$ donc $\varphi(P)$ appartient à $E$. $\boxed{\varphi \text{ est bien un endomorphisme de } E.}$
3. (a) D'après les résultats précédents, la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base $(e_0, e_1, e_2)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice $A$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc $A$ est inversible. Donc $\boxed{\varphi \text{ est inversible.}}$

(c) La matrice $A$ est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : ainsi, $A$ admet 1 comme unique valeur propre. Ainsi, $\mathrm{Spec}(\varphi) = \{1\}$ Raisonnons par l'absurde : si $\varphi$ était diagonalisable, puisque 1 est la seule valeur propre de $\varphi$, il existerait une matrice $P$ inversible telle que $PAP^{-1} = I$ ce qui impliquerait $A = I$ ce qui est absurde.
Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

4. (a) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, il existe un réel $u_n$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0/2 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_0 = 0$

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel $n$ fixé, il existe un réel $u_n$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

avec $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} = \boxed{u_n + \frac{1}{6}(3n+2)}$

La propriété est bien vérifiée au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = \frac{1}{6}(3k + 2)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3} = \frac{n(n-1)}{4} + \frac{n}{3} = \boxed{\frac{3n^2 + n}{12}}$

# Exercice sans préparation BL4

1. Calculer la valeur de chacunes des sommes :

$$S = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2p}}{(2p)!} \qquad \text{et} \qquad I = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

2. Soit $X$ une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X(\omega) \text{ est nul ou impair.} \\ X(\omega)/2 & \text{si} \quad X(\omega) \text{ est pair.} \end{cases}$$

Déterminer la loi de $Y$. La variable aléatoire $Y$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

---

**Solution :**

1. On remarque que

$$S + I = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{p}}{(p)!} = e^{\lambda} \qquad \text{et} \qquad S - I = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\lambda^{p}}{(p)!} = e^{-\lambda}.$$

Donc, par somme et différence,

$$S = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \qquad \text{et} \qquad I = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2}.$$

Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique ne sont pas au programme.

2. • *Loi de $Y$.* D'une part, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 2k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}.$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2p+1) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-\lambda} + \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2} = \frac{1}{2} + e^{-\lambda} - \frac{e^{-2\lambda}}{2}.$$

• *Espérance.* La variable $Y$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}$ converge absolument. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}\frac{2ke^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}\right).$$

D'après la première question, on reconnait le terme général d'une série convergente. Donc, $Y$ admet une espérance qui vaut

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}\right) = \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \frac{\lambda}{4}(1 - e^{-2\lambda}).$$