

Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

ENS Paris – Épreuve écrite de mathématiques 2023

Nina Aguillon, Jérémie Bettinelli, Clémentine Courtès, Igor Kortchemski, Sébastien Martineau

Durée : 4 heures

calculatrice interdite

1 Commentaires généraux

Structure du sujet. Le sujet était composé de deux courts exercices et de trois problèmes indépendants de longueurs variables permettant d'aborder une grande partie du programme. Il comportait des questions abordables dans chaque partie ainsi que des questions plus ouvertes, calculatoires ou ardues.

Bilan général. Le sujet a permis de bien classer les copies, avec un étalement satisfaisant, tant des copies les plus faibles que des copies les plus fortes. Les copies blanches sont rarissimes ; l'immense majorité des personnes interrogées traitent plusieurs questions, et les moins à l'aise réussissent à obtenir quelques points en réinvestissant leurs connaissances au début de chaque problème. Comme à l'ordinaire, les meilleures copies traitent une bonne partie du sujet de manière correcte, démontrant une excellente maîtrise du programme et une qualité de rédaction souvent de haut niveau.

Notation. Nous utilisons les notations figurant au programme officiel. Lorsque celles-ci diffèrent de notations couramment admises dans la communauté mathématique, il arrive que nous rappelions les notations alternatives et elles sont toujours acceptées dans les copies. Nous n'avons pas observé cette année de fantaisie sur l'alphabet grec.

Rappelons toutefois que nous ne pénalisons pas les graphies plus ou moins approximatives et invitons les candidates et candidats à ne pas se formaliser si d'aventure un symbole n'est pas reconnu, et à simplement essayer de le reproduire sur leur copie au besoin.

2 Système de notation

Notes brutes et difficulté du sujet. Chaque question du sujet a été notée par un nombre entier allant de 0 à 4, puis pondérée par un facteur allant de 0.5 à 2. La note brute correspond alors au quart de la somme pondérée ; la note brute maximale ainsi possible était de 65 et la meilleure copie a obtenu une note brute de 52.5 points. Les notes sont ramenées ultérieurement sur 20 par une transformation donnée plus bas.

Le bonus/malus de 2 points sur la note brute a été reconduit cette année pour récompenser les rédactions propres, honnêtes et rigoureuses et pour pénaliser les rédactions trop brouillonnes, malhonnêtes, ou imprécises. On obtient ainsi la distribution suivante des notes brutes, avec une moyenne de 17.8 et une médiane de 16.1.

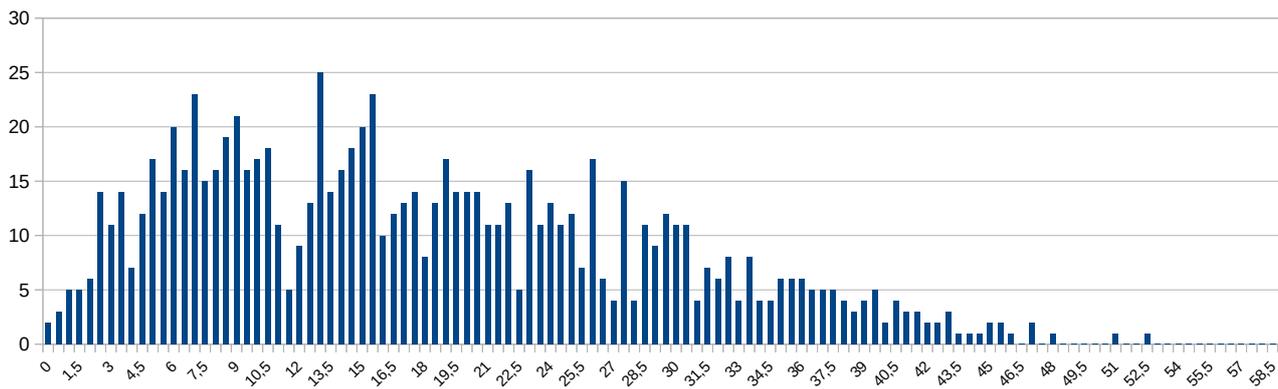


FIGURE 1 – Distribution des notes brutes.

Nous avons par ailleurs estimé pour chaque question son niveau de difficulté : de 1 pour les questions de cours ou de calculs numériques élémentaires jusqu'à 4 pour les raisonnements plus fins et les questions difficiles.

question	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	4c	4d	5	6a	6b	6c	7a	7b	8a	8b	8c	9a	9b	9c	9d	9e	10a	10b	10c	11a	11b
(coefficient)	1.0	0.5	0.5	0.5	0.5	1.0	0.5	1.5	0.5	1.0	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	1.5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
difficulté	1	2	3	2	1	1	3	2	4	1	1	1	2	3	2	2	4	1	1	2	2	1	1	3	2	3	4	1	2	3	2	4
moyenne	3,7	1,9	1,0	3,0	1,2	1,5	1,0	2,1	1,0	3,6	2,3	2,0	2,8	1,0	1,4	2,2	1,1	2,7	2,5	2,2	2,1	1,7	3,1	0,4	0,4	0,5	0,6	2,9	2,9	1,7	1,0	0,1
≥ 0/4 (en %)	88	58	38	30	92	43	81	75	26	96	95	80	54	48	60	64	44	83	77	51	41	30	66	33	14	21	5	33	23	8	10	3
≥ 2/4 (en %)	83	28	9	24	25	17	7	39	9	88	54	41	38	12	24	33	11	61	47	28	25	13	52	2	0	2	26	17	3	2	0	0
≥ 3/4 (en %)	81	27	2	23	21	12	4	36	2	87	53	37	35	3	19	31	10	55	46	27	17	8	48	1	0	2	23	16	3	1	0	0

question	12a	12b	12c	12d	12e	13a	13b	13c	13d	14a	14b	14c	14d	15a	15b	15c	15d	16a	16b	17a	17b	17c	18a	18b	18c	18d	19	20a	20b	21a	21b	
(coefficient)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	2.0	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	1.0	
difficulté	1	1	1	2	1	3	3	3	2	2	3	2	1	3	2	4	2	2	4	1	2	2	1	2	2	4	2	2	2	3	4	
moyenne	3,2	3,8	3,0	2,5	3,2	2,8	2,4	0,6	2,9	1,0	0,5	2,6	3,5	1,8	1,5	3,0	1,7	0,6	0,9	3,3	1,5	2,1	2,8	1,8	2,1	0,6	2,0	1,3	2,3	1,1	1,2	
≥ 0/4 (en %)	96	91	96	88	89	73	65	36	39	64	38	42	51	31	16	13	10	20	5	89	86	73	65	42	45	29	36	19	15	7	2	
≥ 2/4 (en %)	78	87	75	54	73	52	45	4	29	18	4	30	48	19	6	11	4	2	1	74	25	38	49	21	26	1	3	9	3	0	0	
≥ 3/4 (en %)	75	87	72	47	70	48	31	2	26	14	1	23	42	9	5	9	4	1	1	69	19	37	43	17	21	0	17	3	9	2	0	0

FIGURE 2 – Statistiques brutes question par question.

Nous indiquons dans le tableau précédent pour chaque question le coefficient appliqué, le niveau de difficulté que l'on a estimé, la moyenne sur 4 obtenue par les candidates et candidats ayant abordé la question, le pourcentage de copies ayant abordé la question, le pourcentage de copies ayant obtenu au moins la moitié des points et le pourcentage de copies ayant obtenu au moins trois quart des points.

Notes finales sur 20. Traditionnellement, afin d'obtenir une répartition de notes similaire à celle des autres matières, une transformation linéaire par morceaux des notes brutes permet de ramener les notes sur 20. Depuis quelques années, le jury vise à ce que cette transformation soit la plus proche possible d'une transformation linéaire (c'est-à-dire avec un seul morceau), en faisant en sorte que l'étalement des notes soit obtenu directement sur les notes brutes.

Cette transformation a pour effet d'étaler les copies ayant obtenues de faibles notes tout en conservant un écart satisfaisant entre les meilleures copies. Le décrochement au niveau de 0 permet de distinguer les copies ayant obtenu 0 en note brute des autres. Ainsi les 2 copies ayant obtenu la note finale de 0 sont exactement celles qui ont obtenu la note brute de 0.

Sur les notes finales, la moyenne est 9.68, la médiane est 9.50 et l'écart-type est 4.48.

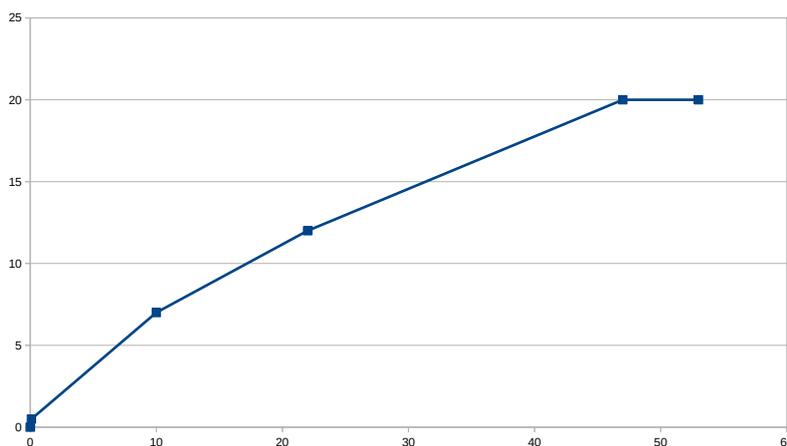


FIGURE 3 – Transformation linéaire par morceaux.

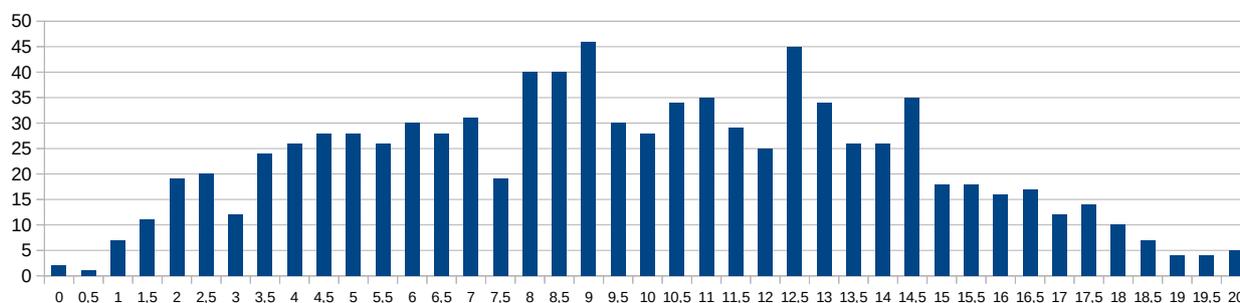


FIGURE 4 – Distribution des notes après transformation.

3 Conseils aux candidates et candidats

Comme chaque année, nous profitons du rapport pour donner aux futures candidates et futurs candidats quelques conseils de base pour bien réussir l'épreuve de mathématiques.

Quantité et qualité. Lors d'une épreuve écrite, il est naturel de chercher à aborder de nombreuses questions et de traiter partiellement tous les problèmes. C'est ce que nous observons dans la plupart des copies : les candidates et candidats avancent dans un problème, repèrent parfois les quelques questions plus accessibles, puis s'arrêtent et passent au problème suivant.

Dans de rares cas, une stratégie de grappillage excessif est visible à la correction. Nous le déconseillons formellement : le résultat n'est jamais convaincant ; les réponses sont au mieux floues, au pire malhonnêtes ; l'absence de vue globale sur le sujet mène à ne traiter que des questions élémentaires ou anecdotiques, souvent peu valorisées ou intraitables telles quelles. À titre d'exemple, nous voyons régulièrement des tentatives de réponses aléatoires aux questions demandant la loi d'une variable aléatoire, qui arrivent après des calculs non effectués permettant d'identifier cette loi. Par ailleurs, les rédactions sautant d'un problème à l'autre dans un complet désordre sont à proscrire.

Il est fréquemment observé des fins de copies plus brouillonnes, plus floues et moins structurées, ce qui est compréhensible face à l'approche de la fin de l'épreuve. Toutefois, peu

de personnes améliorent leur note de cette façon et nous observons généralement des suites plus ou moins longues de 0. Dans la majorité des cas, traiter moins de questions en leur apportant l'attention nécessaire, ou relire sa copie pour éclaircir certains points, aurait été plus bénéfique. Nous incitons les candidates et candidats à repérer si elles ou ils sont efficaces sur ces « fins de copies » en cours d'année et à réfléchir à la meilleure manière d'utiliser leurs dernières minutes d'épreuves.

Honnêteté. Les copies qui tentent de répondre à une question de façon malhonnête sont sévèrement sanctionnées. Lorsque cela se répète plus d'une fois dans une même copie, toute ambiguïté est ensuite systématiquement interprétée comme une erreur et la copie peut recevoir un malus. Si le jury ne parvient pas à lire ce qui est écrit, le bénéfice du doute n'est jamais donné à la copie.

Les personnes candidates sont également invitées à s'interroger sur la cohérence des résultats annoncés sur leur copie. Repérer une incohérence permet généralement de corriger une erreur. À défaut de réussir à la corriger, les candidates et candidats ont intérêt à la signaler. Nous n'hésitons jamais à valoriser une réponse correcte, même très partielle, du moment que ses limites sont clairement identifiées. Mieux vaut une copie qui accepte et montre ses limites qu'une copie malhonnête.

Rédaction. L'épreuve de mathématiques exige rigueur et précision, il est néfaste de tenter de répondre à un grand nombre de questions si on ne soigne pas la rédaction. Quasiment toutes les questions peuvent être traitées en utilisant un ou parfois deux arguments courts. La rédaction des questions élémentaires joue un rôle important dans la notation. Nous favorisons largement les candidates et candidats répondant de manière impeccable à quelques questions par rapport à celles et ceux essayant à tout prix de traiter toutes les questions sans jamais le faire proprement.

Nous invitons les candidates et candidats les plus modestes à accorder davantage de temps à ces questions de base qu'aux questions plus avancées. Il est toujours beaucoup plus difficile de récupérer des points sur les questions plus délicates qui exigent souvent d'avoir bien compris les notations du sujet et les questions précédentes.

Nous détaillons les principales attentes du jury quant à la rédaction de l'épreuve écrite et indiquons des erreurs courantes qu'il convient d'éviter. Une réponse bien rédigée doit montrer *sans ambiguïté* au jury une démonstration *complète, concise, sans argument erroné*, n'utilisant *que des résultats au programme* et *répondant bien à la question posée*.

- **Ambiguïté ou démonstration incomplète.** Une candidate ou un candidat perdra systématiquement des points en laissant floue une partie de son raisonnement. Il est très important en mathématiques de savoir ce que l'on fait, quitte à ne proposer qu'une réponse partielle.

Il est indispensable de mentionner tous les arguments dans la résolution d'une question de base. Par exemple, à la question (1c), il fallait justifier l'existence des limites par encadrement et pas seulement indiquer leur valeur.

De plus, il faut toujours mentionner un résultat prouvé dans une question précédente **au moment où on l'utilise. Il n'est pas nécessaire d'indiquer qu'on admet une**

question qu'on n'arrive pas à démontrer. Ce qui est nécessaire est d'indiquer clairement les résultats des questions précédentes que l'on utilise, peu importe si on a réussi ou non à les démontrer. Par exemple, en (13d), on pouvait faire référence explicitement à l'inégalité de la (13c) en citant la question même sans l'avoir traitée.

Nous avons pénalisé les copies tentant manifestement de grappiller des points en écrivant des assertions non justifiées et souvent fausses dans les questions plus difficiles.

- **Précision.** Insistons une fois de plus sur le fait qu'il faut répondre aux questions posées. Nous n'avons pas noté cette année d'erreur récurrente de ce type.
- **Concision.** La plupart des questions de l'épreuve peuvent être résolues à l'aide d'un argument très court. Nous valorisons toujours les candidates et candidats capables de mettre cet argument en évidence par rapport à celles et ceux qui le délayent dans une suite de calculs ou de phrases sans intérêt. Nous encourageons enfin les candidates et candidats à ne pas faire figurer plusieurs réponses à une question, notamment si l'une est fautive car elle pénalisera très fortement l'autre.
- **Arguments erronés.** Énoncer une affirmation manifestement fautive ne peut que jeter la suspicion sur toute la copie.
- **Rédaction et sténographie.** Nous avons apprécié la disparition presque complète de signes cabalistiques ou notations non-standards; nous encourageons vivement les futures candidates et futurs candidats à poursuivre cet effort.
- **Orthographe, erreurs de calcul.** Même en mathématiques, il est nécessaire de relire sa copie avant de la rendre de manière à éviter autant que possible d'y laisser des fautes d'orthographe ou de calcul grossières. Ainsi, une probabilité qui n'est clairement pas entre 0 et 1 indique toujours une erreur.
- **Présentation de la copie.** Nous insistons à nouveau sur la présentation de la copie et la lisibilité de l'écriture. Nous avons cette année encore eu beaucoup de mal à déchiffrer certaines copies et probablement pénalisé des candidates et candidats croyant sans doute gagner un peu de temps en les négligeant. Nous rappelons qu'un argument illisible est systématiquement considéré comme faux. Nous rappelons également que la copie rendue n'est pas un brouillon. Quand plusieurs pistes ont été poursuivies, celles qui ont été abandonnées doivent être clairement rayées.

Forme. Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie fortement que les réponses soient présentées dans l'ordre, et qu'en tout cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire (en cas d'oubli et de manque de place), ce qui doit rester exceptionnel. Bien séparer les différents problèmes, sur des copies différentes par exemple, est une bonne initiative, notamment pour pouvoir par la suite revenir à un problème commencé mais non terminé.

Il est également demandé que **les conclusions soient mises en valeur** par exemple en les encadrant ou en les soulignant, de préférence avec de la *couleur*. Attention toutefois à ne pas

utiliser de crayon de papier, car celui-ci ne passe pas bien au scanner (cela est valable également pour les illustrations). Il est demandé de respecter les numérotations des questions ((1a), (1b), (2a), etc.) et il est apprécié que **ces numérotations soient également mises en valeur** (en retrait dans la marge, encadrées, en couleur, etc.) car il est courant pour les correcteurs et correctrices d'avoir à revenir en arrière sur une copie ou de revenir sur une copie précédemment corrigée et il est important de pouvoir facilement identifier la question recherchée.

Il n'est pas souhaitable de recopier l'énoncé. En plus de faire perdre du temps aux candidates et candidats, cela est contreproductif car cela rend la copie plus difficile à lire et les réponses plus difficiles à cerner lors de la correction.

Lecture du sujet. Nous invitons les candidates et candidats à bien lire le sujet pour éviter des erreurs grossières. Il est courant de traiter d'un problème général et de regarder des cas particuliers ou des exemples. Utiliser les cas particuliers en dehors des questions concernées est dommageable.

4 Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs ou confusions commises dans plusieurs copies.

- La linéarité de l'espérance est souvent confondue avec la propriété que l'espérance d'un produit de variables indépendantes est le produit des espérances.
- On a noté quelques erreurs sur des notions de logique élémentaire (implication, équivalence).
- Il ne convient pas d'utiliser la locution « par définition » lorsqu'il ne s'agit pas d'une définition.
- Nous avons vu des probabilités clairement hors de $[0, 1]$.
- En règle générale, beaucoup de candidates et de candidats confondent les notions de matrices diagonales et de matrices inversibles.
- On a noté beaucoup d'erreurs sur l'utilisation de l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans un cas concret de deux vecteurs donnés.

5 Commentaires détaillés

Détaillons à présent, question par question, les erreurs les plus fréquentes, dans un but pédagogique.

EXERCICES.

(1) (1a) Cette question a globalement été très bien traitée.

(1b) Peu de copies ont remarqué que $(v_n^2 + w_n^2)_n$ était une suite géométrique. En revanche, plusieurs ont conclu, à tort, que $(v_n^2)_n$ et $(w_n^2)_n$ étaient des suites géométriques.

- (1c) Cette question a été essentiellement traitée dans les bonnes copies : il fallait penser à procéder par encadrement.
- (1d) On pouvait exprimer les limites de $(x_n)_n$ et de $(y_n)_n$ en fonction de celles de $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$, en admettant qu'elles convergent.
- (2) (2a) De nombreuses erreurs à cette question : la plupart du temps, l'ensemble proposé n'était pas un sous-ensemble de \mathbf{R}^2 .
- (2b) Question simple rarement traitée et comprise.
- (2c) Si le calcul de $f(a, a)$ a globalement été bien mené, quasiment toutes les copies concluent que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, a) = 0$ en arguant que $f(a, a)$ ne dépend pas de a .
- (3) (3a) Cette question a permis de tester les connaissances en trigonométrie.
- (3b) Il s'agissait de remarquer que la fonction était indépendante de r (radialement constante).

PROBLÈME A.

- (4) (4a) Bien réussi dans l'ensemble. On a observé des problèmes de quantification, par exemple « le résultat est négatif signifie qu'il existe une personne n'ayant pas la propriété ».
- (4b) Attention à la typographie, ne pas confondre $\{1, n+1\}$, $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $[1, n+1]$, $(1, n+1)$, etc.
- (4c) Bien réussi dans l'ensemble.
- (4d) Cette question devait notamment servir à valider les précédentes.
- (5) Question très mal traitée. La notion de probabilité conditionnelle est clairement mal maîtrisée.
- (6) (6a) Beaucoup d'explication, peu de mathématiques dans cette question qui ne demandait que la manipulation de l'inégalité $E[A_n] \leq n$.
- (6b) Plutôt bien réussie, une fois observé que $x^x = e^{x \ln(x)}$.
- (6c) Le lien avec (6a) et (6b) n'a pas toujours été fait, résultant généralement en une tentative d'explication plutôt qu'un raisonnement mathématique.
- (7) Bien réussi dans l'ensemble.
- (8) (8a) Souvent bien réussie, sans trop d'erreur de décalage d'indice.
- (8b) Beaucoup de copies passent par l'évènement complémentaire. Le calcul est alors plus compliqué et rarement mené à bien.
- (8c) La loi géométrique a souvent été mentionnée, mais l'identification du paramètre a posé plus de problèmes.

- (9) (9a) Bien réussie et souvent identifiée comme une question accessible.
- (9b) Le lien avec l'évènement $\{C = (k-1)n + i\}$ (parfois avec un décalage) est quelquefois apparu, le calcul n'étant mené qu'exceptionnellement à son terme.
- (9c) Question grandement dépendante des précédentes. On a souvent vu des limites dépendant de p .
- (9d) Rarement abordée et souvent par une approche purement calculatoire, ou par un argument fallacieux d'évidence.
- (9e) Question de synthèse, difficile et très peu abordée.
- (10)(10a) Un gain de participation a été noté sur cette question, souvent bien comprise. Les notations étaient parfois floues. Une égalité mathématique était préférable mais une description textuelle en français a été acceptée.
- (10b) Peu traitée. Une égalité mathématique était attendue.
- (10c) Lorsque cette question a été abordée, la formule des probabilités totales a souvent été correctement utilisée.
- (11)(11a) L'approche calculatoire a eu la préférence des candidates et des candidats, ce qui rendait la question très ardue.
- (11b) Rarissimement traitée.

PROBLÈME B.

- (12)(12a) Il s'agissait essentiellement de mentionner que le dénominateur ne peut s'annuler puisqu'il est somme de deux nombres strictement positifs (pas seulement non-nuls).
- (12b) Cette question a généralement été très bien traitée.
- (12c) La dérivabilité est connue pour les fonctions usuelles et stable par opérations usuelles. Il n'était pas nécessaire de repasser par les taux de variation. Cette question testait la maîtrise des calculs de dérivée.
- (12d) Justifier convenablement que f' est strictement positive sur $]-\infty, +\infty[$.
- (12e) Question globalement bien traitée.
- (13)(13a) Cette question évaluait la maîtrise technique du changement de variable.
- (13b) Il convenait de reconnaître la dérivée d'arctangente et d'être capable de déterminer l'intégrale de f entre $-\infty$ et $+\infty$, pas seulement entre 0 et $+\infty$.
- (13c) Cette question difficile a le plus souvent été sautée ou mal traitée. Il était vain de chercher à contrôler $f'(x)$ en étudiant l'asymptotique de cette quantité en $-\infty$ et $+\infty$ puis en espérant que ces estimées encadrent ce qu'il se passe pour les valeurs intermédiaires $x \in]-\infty, +\infty[$.

- (13d) Il s'agissait d'utiliser l'inégalité des accroissements finis, pas de faire l'amalgame entre $f'(x)$ et $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.
- (14)(14a) On a souvent vu, soit les mauvaises hypothèses, soit trop d'hypothèses puis une affirmation que la conclusion en découlait.
- (14b) Cette question assez ardue a posé plus de problèmes encore que la précédente.
- (14c) Il convenait d'être au clair sur les hypothèses des théorèmes employés, notamment la continuité.
- (14d) Cette question a été généralement bien traitée.
- (15)(15a) Faire apparaître clairement les étapes de calcul : les signes ou les dénominateurs ne doivent pas apparaître seulement pour correspondre au résultat fourni par l'énoncé.
- (15b) Cette question a posé beaucoup de difficultés. Nous avons vu diverses formules incorrectes de primitive pour la fonction valeur absolue, ainsi que de nombreux changements de signe mystérieux permettant d'aboutir au résultat annoncé. En cas de contradiction avec l'énoncé, il vaut toujours mieux le mentionner clairement plutôt que d'arranger les calculs de façon malhonnête.
- (15c) Cette question difficile, lorsqu'abordée, était généralement bien traitée.
- (15d) Cette question a été peu et mal traitée.
- (16)(16a) Cette question a posé plus de difficultés que ce à quoi on s'attendait. Il n'a été que rarement observé que la partie trigonométrique de la formule disparaissait. Et parfois, elle disparaissait pour une mauvaise raison : la formule $\sin(2k\pi) = 0$ est valable pour tout k entier, pas pour tout k réel.
- (16b) Cette question difficile n'a quasiment jamais été abordée avec succès.

PROBLÈME C.

- (17)(17a) Question plutôt bien réussie dans l'ensemble.
- (17b) La définition des valeurs propres semble être maîtrisée ainsi que la méthode pour les déterminer. En revanche, peu de calculs ont abouti sur des résultats corrects.
- (17c) Beaucoup de confusion entre matrice diagonalisable et matrice inversible. Le fait d'avoir une valeur propre nulle n'interfère en rien avec le caractère diagonalisable d'une matrice.
- (18)(18a) Question assez peu traitée et réponses rarement correctes.
- (18b) Plutôt bien réussie lorsque la question précédente était correcte.
- (18c) La méthode de déduction par le théorème du rang a vu la préférence des candidates et des candidats. L'approche calculatoire a cependant également été utilisée.

- (18d) Question difficile. Lorsque traitée, beaucoup de copies ont pensé, à bon escient, à reformuler la question en terme d'intersection nulle mais les raisonnements n'ont été qu'exceptionnellement menés à leur terme et corrects.
- (19) Attention à bien prendre en compte l'indication fournie dans le texte pour répondre à cette question.
- (20)(20a) Assez peu traitée. Les cas $j = 1$ et $j = 2n$ ne devaient pas être oubliés dans les calculs.
- (20b) Question très peu abordée mais bien comprise lorsque traitée. Oubli quasi systématique de la vérification que v_θ n'était pas le vecteur nul.
- (21)(21a) Question à la toute fin du sujet très peu traitée.
- (21b) Question rarissimement traitée.