ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

Planche 27

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n :]0;\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction qui à $x \in]0,+\infty[$ associe $f_n(x) = (\ln(x))^n$. Soit $F_n :]0;\infty[\to \mathbb{R}$ la primitive de f_n qui s'annule en 1.

1. Calculer F_1. Calculer $\lim_{x\to 0+} F_1(x)$
2. En s'inspirant du calcul de F_1 trouver une relation entre F_n et F_{n-1}.
3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\lim_{x\to 0+} F_n(x)$.

Exercice 2

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

1. Soit T la variable aléatoire égale au plus petit entier $n \geqslant 2$ tel que $X_{n-1} = 0$ et $X_n = 1$. Par convention, on pose $T = 0$ s'il n'existe pas de tel entier. Montrer que T a la même loi que $X + Y$ où X et Y sont deux variables géométriques indépendantes.
2. Quelle est l'espérance et la variance de T ?
3. Donner la loi de T.
4. On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire S égale au plus petit entier $n \geqslant 2$ tel que $X_{n-1} = 0$ et $X_n = 0$. Par convention, on pose $S = 0$ s'il n'existe pas de tel entier. On pose $u_n = \mathbb{P}(S = n)$. Calculer u_2 et u_3.
5. En considérant le résultat des deux premières pièces, montrer que pour $n \geqslant 3$:
$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-2}.$$
6. Calculer $\mathbb{E}[S]$.