SESSION 2024

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Les problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

* * *

On pourra utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

* * *

Il est demandé de **soigneusement** *numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, en les* $\boxed{\text{encadrant}}$ *ou en les* <u>*soulignant*</u>*. Il sera fait grand cas de la* **clarté**, *de la* **concision** *et de la* **précision** *de la rédaction. L'utilisation de crayon n'est pas recommandée.*

PROBLÈME A.

Dans ce problème, on considère différent dés ayant diverses caractéristiques. Afin de les distinguer, on les nomme à l'aide de différentes couleurs. On rappelle qu'un dé est dit « bien équilibré » si, lors d'un lancer, chaque face apparait avec la même probabilité.

Dé rouge

Le *dé rouge* est **bien équilibré** et a 6 faces, numérotées **1, 2, 3, 4, 5** et **5**. *Autrement dit, la face usuellement numérotée* **6** *a été remplacée par un second* **5**.

On lance ce dé rouge et on note R_0 le résultat obtenu.

(1) *(1a)* Donner la loi de R_0.

(1b) Calculer son espérance $E[R_0]$.

(2) On considère la variable aléatoire X, qui vaut 1 si $R_0 = 5$ et 0 sinon.

(2a) Donner la loi de X.

(2b) Calculer son espérance et sa variance.

On fait dorénavant une succession de lancers du dé rouge, et on numérote les résultats R_1, R_2, R_3, R_4, etc. On suppose toutes les variables aléatoires $R_0, R_1, R_2, \ldots$ indépendantes.

(3) On considère la variable aléatoire $Y = \min\{i \geq 1 \,:\, R_i = 5\}$.

(3a) Donner la loi de Y.

(3b) Donner, sans calcul, son espérance $E[Y]$.

(3c) Donner, sans calcul, sa variance $V[Y]$.

On considère, pour $i \geq 1$, l'évènement S_i « les résultats obtenus aux lancers $i-1$ et i sont les mêmes », c'est-à-dire, $S_i = \{R_{i-1} = R_i\}$.

(4) *(4a)* Pour un $i \geq 1$ fixé, calculer la probabilité $P(S_i)$.

(4b) Les évènements $S_1, S_2, S_3, \ldots$ sont-ils indépendants ?

(4c) Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement $\{R_1 = 5\}$, sachant S_2.

(5) On considère la variable aléatoire $Z = \min\{i \geq 1 \,:\, R_i = R_{i-1}\}$.

(5a) Exprimer Z en fonction de la suite d'évènements $S_1, S_2, S_3, \ldots$
Une description textuelle sera acceptée.

Tournez la page S.V.P.

(5b) La variable aléatoire Z suit-elle une loi géométrique ?
Une justification précise est attendue.

Dé blanc

Le *dé blanc* est classique, **bien équilibré** et a 6 faces, numérotées **1, 2, 3, 4, 5** et **6**.

On lance ce dé blanc et on note B le résultat obtenu, que l'on suppose indépendant de R_0.

(6) Calculer la probabilité que B soit égal à R_0.

Dé vert

Le *dé vert* est **bien équilibré** et a 6 faces, numérotées **1, 1, 3, 5, 5** et **5**.

On lance ce dé vert et on note V le résultat obtenu, que l'on suppose indépendant de R_0.

(7) Calculer la probabilité que V soit égal à R_0.

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \min\left(\frac{x}{2}, e^{2-x}\right) \end{array}$$

où l'on rappelle que, pour deux réels a et b, on note $\min(a, b)$ le minimum entre ces deux nombres.

(8) (8a) Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(2 + \ln(2))$.

(8b) Montrer qu'il existe un unique point $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $\dfrac{x}{2} = e^{2-x}$ et donner sa valeur.

(8c) Tracer le graphe de la fonction f.

On considère une variable aléatoire N à densité dont la densité est la fonction λf, où $\lambda \in \mathbf{R}_+$ est un réel.

(9) (9a) Déterminer la valeur de λ.

(9b) Calculer $P(N > 2)$.

(9c) Pour $x \in \mathbf{R}_+$, calculer $P(N > x + 2 \,|\, N > 2)$.

(9d) Calculer l'espérance $E[N]$.

(10) On cherche à créer une variable aléatoire D à partir de N qui ait la même loi que la variable aléatoire V donnant le résultat d'un jet de dé vert. Pour cela, on choisit des réels $0 < a < b$ et on décrète que

— si $0 \leq N < a$, alors $D = 1$;

— si $a \leq N < b$, alors $D = 3$;

— si $b \leq N$, alors $D = 5$.

(10a) Calculer b.

(10b) Calculer a.

Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, on note $[x]$ le plus grand entier inférieur ou égal à x.

(11) Construire, éventuellement en traçant son graphe, une densité g de probabilité telle que, si la variable aléatoire à densité G a pour densité g, alors $[G]$ a la même loi que le résultat d'un jet de dé rouge R_0.

Problème B.

On considère la fonction $g\colon \mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = x - 2e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x \in \mathbf{R}_+^\star$.

(12)(12a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

(12b) Déterminer la limite de g à droite en 0.

(12c) Le graphe de g intersecte-t-il la droite d'équation $y = x$?

On considère la fonction $h\colon \mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$ définie par $h(t) = \ln(t) - t$ pour $t \in \mathbf{R}_+^\star$.

(13)(13a) Étudier les limites de h au bord de son domaine de définition.

(13b) Montrer que h est dérivable et calculer sa dérivée.

(13c) Dresser le tableau de variation de h.

(13d) Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^\star$, on a $\ln(2t) < t$.

(13e) En déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, on a $g(x) > 0$.

On fixe un réel $u_0 \in \mathbf{R}_+^\star$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_{n+1} = u_n - 2e^{-\frac{1}{u_n}}$.

(14)(14a) Montrer que u_n est ainsi bien défini pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(14b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite.

(14c) Montrer que la valeur de cette limite est $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

On se donne un réel $\alpha > 0$.

(15)(15a) Donner un développement limité à l'ordre 1 en $s = 0$ de la fonction $s \mapsto (1-s)^{-\alpha}$.

(15b) Déterminer la limite de $2u_k^{-1}e^{-\frac{1}{u_k}}$ lorsque $k \to \infty$.

(15c) Déduire des deux questions précédentes que $u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha} \to 0$ lorsque $k \to \infty$.

(15d) Soit un réel $\varepsilon > 0$. En écrivant que $|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \leq |u_n^{-\alpha} - u_p^{-\alpha}| + |u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}|$ pour un entier p bien choisi, montrer qu'il existe un entier $q \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq q$, on aie l'inégalité $|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \leq 2\varepsilon\, n$.

(15e) En déduire la limite du quotient $\dfrac{u_n^{-\alpha}}{n}$ lorsque $n \to \infty$.

(15f) Calculer la limite de $n^\alpha u_n$ lorsque $n \to \infty$.

On considère dorénavant $F\colon \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$ définie par $F(x,y) = x - y\,e^{-\frac{1}{x}}$ pour $(x,y) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}_+^\star$.

(16)(16a) Calculer les dérivées partielles de F.

(16b) Trouver les extremums locaux de F.

On fixe $y \in \mathbf{R}_+^\star$ et on s'intéresse à l'équation $F(x,y) = 0$, où l'inconnue est donc la variable x.

(17)(17a) En posant $t = \frac{1}{x}$, montrer que l'équation $F(x,y) = 0$ se ramène à une équation $h(t) = r$, où $t \in \mathbf{R}_+^\star$ est l'inconnue, r est un réel, et h est la fonction introduite juste avant la question *(13)*.

(17b) Déterminer, selon la valeur de r, le nombre de solutions à l'équation $h(t) = r$.

(17c) En déduire, selon la valeur de y, le nombre de solutions à l'équation $F(x,y) = 0$.

Tournez la page S.V.P.

Problème C.

Dans tout le problème, on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on note M^{T} sa transposée. Enfin, on note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire entre les vecteurs u et v de $\mathbf{R}^3$, ainsi que $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ la norme de u.

Cas particulier. On considère l'application

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-y, z, -x) \end{array} .$$

(18)(18a) Montrer que ρ est une application linéaire et exprimer la matrice A représentant ρ dans la base canonique.

(18b) Calculer $A^{\mathrm{T}}A$. La matrice A est-elle inversible ?

(19)(19a) Montrer que l'endomorphisme ρ admet 1 comme valeur propre et déterminer un vecteur propre associé que l'on notera v_1.

(19b) On introduit le vecteur $v_2 = (2, 1, 1)$. Calculer $\langle v_1, v_2\rangle$.

(19c) Déterminer un vecteur v_3 tel que $\langle v_3, v_2\rangle = 0$, $\langle v_3, v_1\rangle = 0$ et $\|v_3\| = \|v_2\|$.

(19d) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbf{R}^3$.

(19e) Déterminer quatre réels α, β, γ, et δ tels que $\rho(v_2) = \alpha v_2 + \beta v_3$ et $\rho(v_3) = \gamma v_2 + \delta v_3$.

(19f) Donner la matrice B de l'endomorphisme ρ dans la base (v_1, v_2, v_3).

(19g) Trouver un réel θ pour lequel $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Cas général. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on note $\mathcal{S}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres.

Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ une matrice telle que $C^{\mathrm{T}}C = CC^{\mathrm{T}} = I_3$.

(20) **Dans cette question**, on suppose que $-1 \notin \mathcal{S}(C)$.

(20a) Montrer que la matrice $C^{\mathrm{T}} + I_3$ est inversible.

(20b) Calculer $\left(C^{\mathrm{T}} + I_3\right)\left(C - I_3\right)$.

(20c) Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que $C - C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

(20d) Montrer que le noyau de l'application représentée par $C - C^{\mathrm{T}}$ est non nul.

(20e) En déduire que 1 est valeur propre de la matrice C.

(21) On ne suppose plus que $-1 \notin \mathcal{S}(C)$. Montrer que $1 \in \left(\mathcal{S}(C)\right) \cup \left(\mathcal{S}(-C)\right)$.

Pour toute matrice colonne non nulle $Z \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on note $\|Z\| = \sqrt{Z^{\mathrm{T}}Z}$ la norme du vecteur associé et on définit la matrice

$$H_Z = 2\frac{ZZ^{\mathrm{T}}}{\|Z\|^2} - I_3.$$

(22) Soit $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ non nulle, ainsi que $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

(22a) Calculer $(H_V)^{\mathrm{T}}$, $H_V V$, et $(H_V)^{\mathrm{T}}H_V$.

(22b) Montrer que $H_V X = Y$ équivaut à $H_V Y = X$.

Soient maintenant X et Y deux éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ tels que $\|X\| = \|Y\| = 1$ et $X + Y \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(23)(23a) Calculer $H_{X+Y} X$.

(23b) On fixe $\tau \in \mathbf{R}$. On note

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tau) & \sin(\tau) \\ 0 & -\sin(\tau) & \cos(\tau) \end{pmatrix}, \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on fixe $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que $V \neq -e_1$ et $\|V\| = 1$, et on considère $M = H_{V+e_1} R H_{V+e_1}$. Montrer que $M^{\mathrm{T}} M = I_3$ et que V est un vecteur propre de M.

On considère une application linéaire $\varphi \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ qui vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R}^3,\ \forall y \in \mathbf{R}^3, \quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

On suppose que $E_1 = \{x \in \mathbf{R}^3, \varphi(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1. On note u un élément de E_1 tel que $\|u\| = 1$.

(24)(24a) Montrer que si $\langle x, u \rangle = 0$, alors $\langle \varphi(x), u \rangle = 0$.

(24b) On note $\varphi(E_1^{\perp}) = \{y \in \mathbf{R}^3 \ : \ \exists x \in E_1^{\perp}, y = \varphi(x)\}$. Montrer que $\varphi(E_1^{\perp}) \subset E_1^{\perp}$.

(24c) On considère une base orthonormée $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbf{R}^3$ dont le premier vecteur est u. On note

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$$

la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer la première ligne et la première colonne de N, c'est-à-dire les valeurs des coefficients n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{21} et n_{31}.

(24d) Que vaut le produit $\begin{pmatrix} n_{22} & n_{23} \\ n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} n_{22} & n_{23} \\ n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$?