

Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

ENS Paris – Épreuve écrite de mathématiques 2025

Nina Aguillon, Jérémie Bettinelli, Igor Kortchemski

Durée : 4 heures

calculatrice interdite

1 Introduction

Structure du sujet. Le sujet était composé de trois problèmes indépendants permettant d'aborder diverses notions couvrant les trois grands axes du programme. Nous avons porté une attention particulière à proposer des questions abordables dans chaque partie, mais également à poser régulièrement des questions plus délicates. En particulier, le sujet était calibré de sorte à ce que les candidates et candidats les plus à l'aise en mathématiques puissent avoir le temps d'aborder la quasi-totalité des questions et de s'attarder sur les questions délicates, généralement placées en fin de problèmes.

Bilan général. Le sujet a permis de bien classer les copies, y compris pour les faibles notes. La présence de nombreuses questions simples permet aux candidates et candidats les moins à l'aise en mathématiques de traiter une partie du sujet et d'obtenir quelques points, les récompensant de leur investissement en mathématiques. Nous leur conseillons donc de ne pas se censurer et de traiter ce qui est à leur portée. Nous demeurons très satisfaits du niveau des meilleures copies qui, comme chaque année, abordent avec succès un grand nombre de questions et démontrent ainsi une bonne maîtrise de toutes les parties du programme.

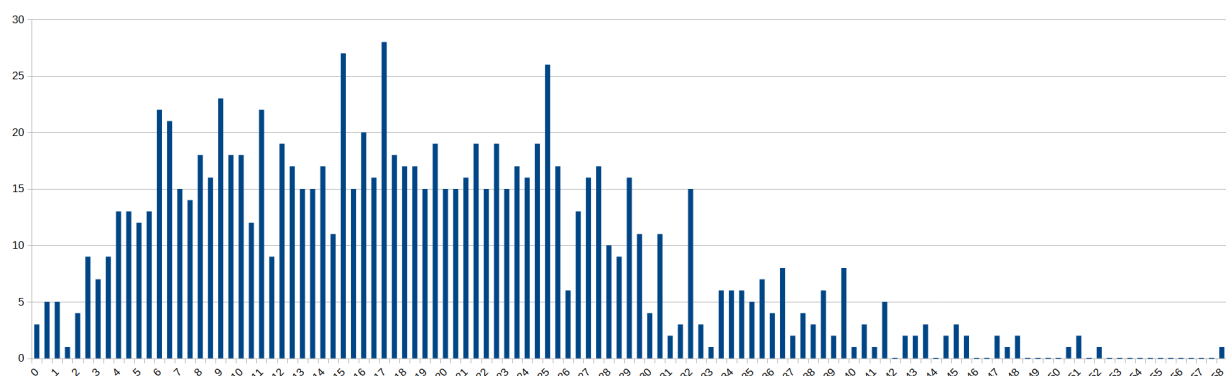
Notations utilisées. Nous utilisons dans la mesure du possible la notation figurant au programme officiel ; ainsi les ensembles de nombres sont notés \mathbf{N} , \mathbf{R} , etc., les probabilités et espérances respectivement P et E . Les personnes utilisant sur leur copie des notations usuelles différentes ne sont en aucun cas pénalisées. Nous rappelons que les lettres grecques sont couramment utilisées en mathématiques et invitons les candidates et les candidats à en connaître a minima leur graphie.

2 Notes des copies

Notes brutes et difficulté du sujet. Chaque question du sujet a été notée par un nombre entier allant de 0 à 4, puis pondérée par un facteur allant de 0.5 à 2. La note brute correspond alors au quart de la somme pondérée ; la note brute maximale ainsi possible était de 65.5 et la meilleure copie a obtenu une note brute de 58 points. Les notes sont ramenées ultérieurement sur 20 par une transformation donnée plus bas.

Le bonus/malus de 2 points sur la note brute a été reconduit cette année pour récompenser les rédactions propres, honnêtes et rigoureuses et pour pénaliser les rédactions trop

brouillonnes, malhonnêtes, ou imprécises. On obtient ainsi la distribution suivante des notes brutes, avec une moyenne de 17.4 et une médiane de 18.5.



Nous avons estimé à titre indicatif pour chaque question son niveau de difficulté : de 1 pour les questions de cours ou de calculs numériques élémentaires jusqu'à 4 pour les raisonnements plus fins et les questions difficiles.

question	1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	3a	3b	3c	4	5a	5b	5c	6	7a	7b	8a	8b
coefficient	1,0	1,5	1,0	1,0	1,5	2,0	1,5	2,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	1,0	0,5
difficulté	1	2	1	1	2	1	2	2	3	3	2	1	3	2	3	2	4	2	4
moyenne	3,4	2,8	3,6	3,4	1,8	2,1	2,2	0,8	1,0	1,0	1,3	1,6	0,6	1,0	0,9	1,2	0,0	0,4	0,6
moyenne 65 meilleures copies	3,9	3,3	3,7	3,9	3,1	2,8	3,7	2,7	2,7	2,7	2,5	3,3	1,4	2,0	1,7	2,8	0,0	1,3	1,2
≥ 0/4 (en %)	100	96	99	98	74	91	82	47	41	12	21	23	14	8	13	11	6	5	1
≥ 2/4 (en %)	84	65	88	81	32	65	47	10	9	3	9	10	2	2	3	3	0	0	0
≥ 3/4 (en %)	78	58	84	80	18	33	41	7	6	3	4	8	1	1	2	3	0	0	0

question	9a	9b	10a	10b	11a	11b	11c	12a	12b	13a	13b	13c	13d	14a	14b	14c	15a	15b	15c	15d	15e
coefficient	1,0	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,5
difficulté	1	1	1	1	1	2	2	2	3	1	2	2	3	3	2	3	2	3	4	2	4
moyenne	2,7	2,2	2,6	1,3	2,0	1,7	1,4	1,1	0,7	1,8	1,0	1,1	1,0	1,5	2,4	3,1	1,6	1,9	1,0	1,6	0,6
moyenne 65 meilleures copies	3,9	3,3	3,9	2,9	3,9	2,9	3,2	2,6	1,5	3,7	2,8	3,0	2,6	3,0	3,8	3,4	3,3	3,1	2,1	3,3	1,7
≥ 0/4 (en %)	91	86	91	70	76	57	53	54	48	61	39	28	21	54	50	49	14	8	5	14	10
≥ 2/4 (en %)	62	46	56	20	39	26	17	13	4	28	8	7	5	20	31	39	5	4	1	5	1
≥ 3/4 (en %)	58	41	52	18	35	12	15	10	3	26	7	6	4	9	27	34	5	3	1	4	1

question	16a	16b	16c	17a	17b	18a	18b	18c	18d	19	20a	20b	20c	21a	21b	21c	21d	21e	22a	22b	23a	23b	23c	23d
coefficient	1,0	1,5	1,5	1,0	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5
difficulté	1	1	1	2	2	1	2	2	2	3	2	3	3	4	1	2	2	2	3	3	3	2	4	3
moyenne	3,5	3,6	3,2	1,5	2,4	3,1	2,7	1,9	2,0	1,5	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,4	1,8	1,2	1,1	0,2	0,9	1,1	0,1	0,2
moyenne 65 meilleures copies	4,0	4,0	4,0	2,1	3,5	3,9	4,0	3,7	3,6	2,2	3,6	2,9	2,9	3,0	3,0	2,2	2,4	1,9	1,9	1,4	2,1	2,8	0,5	0,8
≥ 0/4 (en %)	99	99	96	67	77	94	89	66	49	50	47	55	35	79	44	47	11	8	35	21	15	7	3	2
≥ 2/4 (en %)	94	87	78	29	56	71	59	31	23	17	22	22	16	22	22	17	5	2	7	1	4	2	0	0
≥ 3/4 (en %)	79	86	75	27	35	69	56	28	22	14	18	21	14	17	17	9	3	2	7	1	3	1	0	0

Nous indiquons dans le tableau précédent pour chaque question le coefficient appliqué, le niveau de difficulté que l'on a estimé, la moyenne sur 4 obtenue par les candidates et candidats ayant abordé la question, la moyenne sur 4 obtenue par les candidates et candidats ayant obtenu une des 65 meilleures notes finales, le pourcentage de copies ayant abordé la question, le pourcentage de copies ayant obtenu au moins la moitié des points et le pourcentage de copies ayant obtenu au moins trois quart des points.

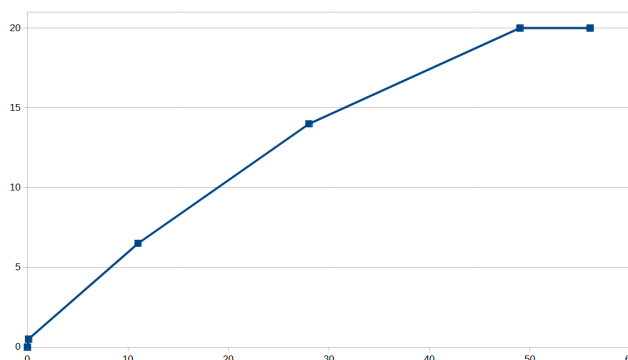
La raison pour laquelle nous donnons la moyenne des 65 meilleures copies est que ce nombre correspond au nombre d'admissibles à l'ENS Paris en filière B/L.

Questions les plus discriminantes. Les questions les plus discriminantes sont les questions que les candidates et candidats qui obtiennent une bonne note totale réussissent significativement mieux que celles et ceux qui obtiennent une faible note totale. Pour les déterminer, nous avons calculé les coefficients de corrélation de Pearson entre les scores à chaque question et les notes brutes totales (hors cette question pour éviter l'auto-corrélation). Les 11 questions les plus discriminantes sont, dans l'ordre décroissant (corrélation entre 0.68 et 0.62) :

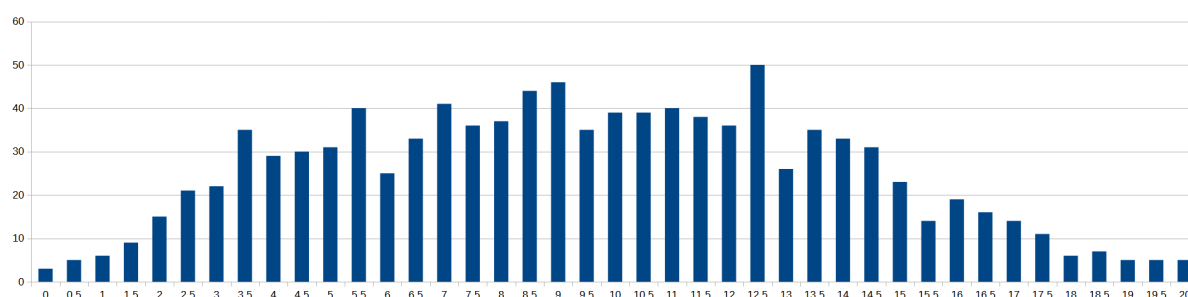
(13d), (15a), (23b), (3c), (20a), (15d), (15b), (5a), (14a), (3a) et (7a).

Croissance de la difficulté et conception des problèmes. Comme on peut l'observer sur le tableau précédent, le sujet est conçu de sorte qu'au sein de chaque problème, les questions ont des difficultés essentiellement croissantes. Par ailleurs, les premières questions, portant généralement sur la base des notions à maîtriser, sont souvent généreusement valorisées. Enfin, la bonne compréhension du début du problème est généralement nécessaire à la résolution de la suite. Il est donc beaucoup plus judicieux de traiter les questions dans l'ordre, en sautant au besoin quelques questions avec parcimonie, que de tenter de résoudre les questions de fin de problème sans avoir traité le début.

Notes finales sur 20. Afin d'obtenir une répartition de notes similaire à celle des autres matières, une transformation linéaire par morceaux des notes brutes permet de ramener les notes sur 20.



Cette transformation a pour effet d'étaler les copies ayant obtenues de faibles notes tout en conservant un écart satisfaisant entre les meilleures copies. Le décrochement au niveau de 0 permet de distinguer les copies ayant obtenu 0 en note brute des autres. Sur les notes finales, la moyenne est 9.47, la médiane est 9.50 et l'écart-type est 4.38. La moyenne des 65 admissibles à l'ENS Paris – B/L est de 16.0 et la moyenne des 72 admissibles au concours ENS Paris-Saclay Sciences Sociales est de 15.3.



3 Conseils

Réflexion. Nous invitons les candidates et candidats à ne pas chercher absolument à calquer directement une méthodologie, surtout si cela semble ne pas fonctionner. Les questions précédentes peuvent souvent être utilisées. Par exemple, la question (21c) s’obtenait très simplement à partir de la précédente, alors que la méthodologie générale de recherche d’extremums ne fonctionnait pas bien ici.

Honnêteté. Nous rappelons qu’il est immédiat de repérer les copies qui tentent de répondre à une question de façon malhonnête ou de grappiller des points. Ces tentatives de bluff sont particulièrement irritantes et contreproductives, toute ambiguïté étant ensuite systématiquement interprétée comme une erreur.

Une réponse donnée de façon aléatoire, même juste, ne rapportera pas de point et sera également mal perçue par le jury. Cela s’applique, par exemple, lorsqu’une loi de probabilité est demandée pour une variable aléatoire, et qu’on peut lire une réponse du type « La variable X suit une loi de Poisson. » sans que les questions précédente aient été traitées.

Nous vous invitons à vous interroger sur la cohérence des résultats annoncés. Repérer une incohérence permet généralement de corriger une erreur. À défaut de réussir à la corriger, vous avez intérêt à la signaler. Nous n’hésitons jamais à valoriser une réponse correcte, même très partielle, du moment que ses limites sont clairement identifiées. Mieux vaut une copie qui accepte et montre ses limites qu’une copie malhonnête.

Complétude et simplification. Il convient de donner des **réponses complètes**. Lorsqu’une réponse dépend de paramètres, ce qui est le cas notamment des lois de probabilité, ceux-ci doivent être donnés ! Ainsi, dire qu’une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli ou une loi exponentielle sans préciser le paramètre n’est pas complet et ne permet généralement pas d’obtenir beaucoup de points. De plus, il faut que le paramètre soit explicite, on ne peut pas dire qu’une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre p s’il n’y a pas de p défini dans le sujet... Les résultats doivent être donnés uniquement en fonction de paramètres apparaissant dans l’énoncé !

Il faut également simplifier les résultats lorsque cela est possible, comme pour $\frac{2}{4}$ ou $\frac{n(n+1)}{2n}$ par exemple.

Rédaction. Les mathématiques exigent rigueur et précision, et il convient de bien soigner la rédaction ; il est inutile et même néfaste de tenter de répondre à un grand nombre de questions sans accorder de soin à la rédaction. Mieux vaut traiter proprement les premières questions et s’arrêter lorsque la difficulté devient trop élevée que tenter à tout prix de traiter plus de questions sans rien faire convenablement. Les points perdus par manque de soin sur les premières questions sont difficilement récupérables sur les questions plus délicates de fin de problème.

Une réponse bien rédigée doit montrer *sans ambiguïté* au jury qu’une démonstration **complète, concise, sans argument erroné**, n’utilisant **que des résultats au programme** et **répondant bien à la question posée** a été trouvée.

- **Ambiguïté ou démonstration incomplète.** Vous perdrez systématiquement des points en laissant floue une partie de votre raisonnement. Il est très important en mathématiques de savoir ce que l'on fait, quitte à ne proposer qu'une réponse partielle.

Il est indispensable de mentionner **tous les arguments** utilisés dans la résolution d'une question, si basique soit-elle.

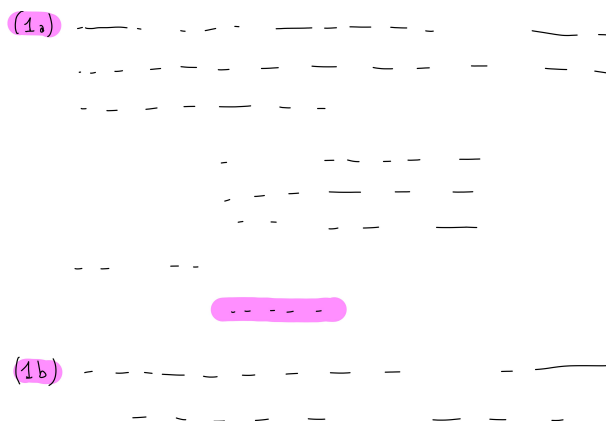
De plus, vous pouvez toujours utiliser les résultats des questions précédentes, même si vous n'avez pas réussi à les prouver. Dans ce cas, il s'agit d'invoquer le résultat de la question utilisée **au moment où on l'utilise**, et seulement à ce moment-là. Une rédaction type serait « D'après la question (Xx), on a [...] et donc on obtient [...] », et peu importe que vous ayez réussi la question (Xx) invoquée ou non. **Il ne faut jamais indiquer qu'on admet une question que l'on n'arrive pas à démontrer!**

Nous avons pénalisé les copies tentant manifestement de grappiller des points en écrivant des assertions non justifiées et souvent fausses dans les questions plus difficiles.

- **Précision.** Insistons une fois de plus sur le fait qu'il faut répondre aux questions posées. Si on demande par exemple un vecteur propre, il faut donner un vecteur propre et non un sous-espace propre.
- **Concision.** La plupart des questions de l'épreuve peuvent être résolues à l'aide d'un argument très court. Nous valorisons toujours les copies qui mettent cet argument en évidence par rapport à celles qui le délayent dans une suite de calculs ou de phrases sans intérêt. Nous vous encourageons enfin à ne pas faire figurer plusieurs réponses à une question, notamment si l'une est fausse car elle pénalisera très fortement l'autre.
- **Arguments erronés.** Énoncer – souvent de façon péremptoire – une affirmation manifestement fausse ne peut que jeter la suspicion sur toute la copie.
- **Abréviations et sténographie.** Nous avons apprécié la disparition presque complète d'abréviations; nous vous encourageons vivement à poursuivre cet effort.
- **Orthographe et erreurs de calcul.** Même en mathématiques, il est nécessaire de relire sa copie avant de la rendre de manière à éviter autant que possible d'y laisser des fautes d'orthographe ou de calcul grossières. Il existe de nombreux garde-fous en mathématique, utilisez-les! Par exemple, une probabilité est entre 0 et 1, une exponentielle est strictement positive, etc.
- **Lisibilité.** Nous rappelons qu'un argument illisible est systématiquement considéré comme faux. Nous rappelons également que la copie rendue n'est pas un brouillon. Quand plusieurs pistes ont été poursuivies, celles qui ont été abandonnées doivent être clairement rayées.

Présentation. Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie fortement que les réponses soient présentées dans l'ordre. Bien séparer les différents problèmes, sur des copies différentes par exemple, est une bonne initiative, notamment pour pouvoir par la suite revenir à un problème commencé mais non terminé. Cela permet également de traiter les problèmes dans l'ordre souhaité puis de les remettre dans le bon ordre au moment de rendre sa copie.

Il est également demandé de **mettre les conclusions en valeur**, de préférence en les **surlignant** ou en les **encadrant**, a minima en les **soulignant**. Il est demandé de respecter les numérotations complètes des questions ((1a), (1b), (2a), etc.) et il est apprécié que **ces numérotations soient également mises en valeur** (en retrait dans la marge, surlignées, encadrées, en couleur, etc.) car il est courant pour les correctrices et correcteurs d'avoir à revenir en arrière sur une copie, ou de revenir sur une copie précédemment corrigée ; il est alors important de pouvoir facilement identifier la question recherchée. Voici un exemple de présentation idéale, où la numérotation et les réponses sont surlignées :



Par ailleurs, il est demandé de **ne jamais recopier l'énoncé**. En plus de vous faire perdre du temps, cela est contreproductif car cela rend la copie plus difficile à lire et les réponses plus difficiles à cerner pour l'équipe correctrice. De même, évitez les introductions ne menant nulle part ou les début de phrases non achevées : évitez par exemple d'écrire « Montrons que la suite $(u_n)_n$ admet une limite. » ou « La suite $(u_n)_n$ admet une limite car » si vous ne savez pas comment traiter la question.

Les copies étant numérisées, il est demandé d'utiliser des stylos noirs ou bleus pour le corps de texte. Pour la mise en lumière des résultats et des numéros de questions, les surligneurs et les stylos de couleur ne posent aucun problème de lecture. Seul le crayon de papier est à éviter (également sur les illustrations telles les graphes de fonctions) car il résiste mal à la numérisation.

Lecture du sujet. Nous vous invitons à bien lire le sujet pour éviter des erreurs grossières. Il est courant de traiter d'un problème général et de regarder des cas particuliers ou des exemples. Utiliser les cas particuliers en dehors des questions concernées est bien évidemment dommageable. Nous avons veillé à bien insister dans le sujet sur ce point et n'avons observé que de rares confusions cette année.

4 Commentaires sur le sujet

4.1 Commentaire généraux

- Attention à simplifier les réponses : nous avons régulièrement vu des réponses finales telles que $\frac{4}{6}, \frac{M(M+1)(M+2)}{2M}$.

- Attention à proposer des **réponses cohérentes** : en particulier, une probabilité, conditionnelle ou non, est toujours dans $[0, 1]$, l'intégrale d'une fonction positive est positive, l'espérance d'une variable aléatoire est comprise entre le minimum et le maximum des valeurs qu'elle peut prendre, une variance est positive, etc.
- La linéarité de l'espérance est souvent confondue avec la propriété que l'espérance d'un produit de variables indépendantes est le produit des espérances.
- La formule de Bayes ne doit pas être confondue avec la définition d'une probabilité conditionnelle.

4.2 Commentaires détaillés.

PROBLÈME A.

- (1) (1a) Quelques confusions entre A et sa matrice transposée.
 - (1b) Cette question a très souvent été résolue par la méthode du pivot de Gauss. Un certain nombre de copies justifient l'inversibilité en mentionnant le caractère triangulaire supérieur, mais oublient de préciser que la diagonale ne comporte que des entrées non nulles.
 - (1c) Ces questions ont globalement été bien traitées.
 - (1d) Ces questions ont globalement été bien traitées.
 - (1e) De nombreuses copies trouvent le bon résultat, sans parvenir à le démontrer.
 - (2) (2a) Question bien abordée, mais de très nombreuses confusions entre
 - vecteur propre ;
 - sous-espace propre ;
 - base du sous-espace propre.Seule une poignée de copie a donné la réponse attendue, à savoir l'ensemble des vecteurs propres (qui sont donc non nuls).
 - (2b) Une justification précise était attendue ici.
- (3) (3a) Cette question a été relativement discriminante et a été réussie dans les bonnes copies.
 - (3b) Certaines copies ont pu résoudre cette question sans réussir la question précédente.
 - (3c) Question souvent réussie par les copies ayant réussi la question (3a).
- (4) Cette question a souvent été bien traitée par les copies ayant réussi la question (3a).
 - (5) (5a) Cette question a été réussie par les candidates et candidats ayant bien compris la définition de b .
 - (5b) Il fallait bien justifier les égalités d'espaces vectoriels, par exemple en utilisant le théorème du rang.
 - (5c) Une justification précise était attendue : il ne suffisait pas de simplement écrire que $B - I_{n+1}$ était nilpotente.

- (6) Question traitée dans les très bonnes copies. Il est dommage que certaines copies initient un calcul correct pour les premières valeurs mais abandonnent en cours de route.
- (7) (7a) Question globalement bien réussie par les copies l'ayant traitée.
(7b) Aucune copie n'a réussi cette question très difficile, qui nécessitait de combiner des ingrédients issus de plusieurs questions précédentes.
- (8) $\begin{smallmatrix} (8a) \\ (8b) \end{smallmatrix}$ Ces questions n'ont été résolues que dans quelques très rares copies.

PROBLÈME B.

- (9) Plusieurs confusions sur le paramètre de la loi, qui pouvait être M , n , ou 1.
- (10)(10a) Plutôt bien réussie. On note régulièrement l'apparition d'un paramètre p non défini. On rappelle par ailleurs que les réponses doivent être données en fonction des paramètres de l'énoncé : si l'on introduit par exemple $p = \frac{2}{M}$, il convient toutefois de donner les résultats finaux en fonction de M et non de p . On pourrait par exemple écrire :
- « D'après le cours, $V[Y] = p(1 - p)$ donc $V[Y] = \frac{2}{M}(1 - \frac{2}{M})$. »
- (10b) De nombreuses erreurs de calcul et de raisonnement. On a notamment régulièrement lu que $E[(Y + W)^2] = 4E[Y^2]$ puisque Y et W ont la même loi.
- (11)(11a) La variance nulle semble avoir déstabilisé certaines personnes.
(11b) Bien réussie, surtout lorsque les cas $n \leq M$ et $n > M$ ont été traités séparément.
- (12)(12b) De nombreuses erreurs de calcul et de raisonnement.
- (13) Questions peu traitées et souvent de façon aléatoire. On rappelle qu'une réponse catapultée sans contexte de façon clairement aléatoire ne donne pas de point, même si, par pure chance, elle présente des éléments justes (*par exemple, $T_2 - T_1$ suit une loi géométrique de paramètre p*).
- (14)(14a) Il s'agissait d'utiliser la décroissance de la fonction inverse, de sommer et d'intégrer, en veillant à bien choisir les bornes afin d'obtenir des intégrales finies. De nombreuses copies se sont arrêtées à un encadrement par des intégrales sans les calculer.
(14b)
(14c) Les réponses citant le cours ont été admises à condition de bien énoncer le critère.
- (15) Question peu abordée.

PROBLÈME C.

- (16)(16a) Question bien traitée en général.

- (16b) On attendait une justification très rapide. Le calcul a été bien traité.
- (16c) Quelques incohérences avec la question précédente.
- (17)(17a) Le vocabulaire est souvent mal maîtrisé. Si les points d'annulation de la dérivée seconde ont régulièrement été regardés, il a beaucoup plus rarement été vérifié que cette dernière changeait de signe.
- (17b) L'information $f'(0) = 1$ est mal représentée sur la plupart des copies.
- (18)(18a) Questions souvent bien traitées. L'obtention d'un résultat négatif devait alerter !
- (18b) Questions souvent bien traitées. L'obtention d'un résultat négatif devait alerter !
- (18c) On a souvent vu des conjectures incorrectes, trop rapidement extrapolées des résultats précédents.
- (18d) Bien traitée lorsque la question précédente était correcte.
- (19) La notion de développement limité est très mal maîtrisée. Le développement limité de $x \mapsto e^x$ était souvent erroné et celui de $x \mapsto e^{-x}$ rarement correct.
- (20)(20a) Cette question était en général réussie si (18d) avait été bien traitée.
- (20b) La traduction en terme de calcul d'intégrale a souvent posé problème. Attention à bien obtenir un résultat entre 0 et 1 !
- (20c) On a souvent vu des erreurs sur la notion de probabilité conditionnelle. De nombreuses copies ont cherché à utiliser la propriété vue en cours de loi sans mémoire provenant d'un autre contexte.
- (21)(21a) On attendait une disjonction de cas en fonction du signe de x , sans insister sur la non-dérivabilité en $x = 0$. Cette disjonction fut rarement faite.
- (21b) Question peu traitée. On attendait une information (éventuellement graphique) sur le coefficient directeur de la droite.
- (21c) Cette question pouvait se traiter très simplement à l'aide de la précédente, qui montrait l'inexistence d'extremum local à x fixé. Beaucoup de copies utilisent directement le critère sur les dérivées secondes sans déterminer auparavant les points critiques. Il n'y en avait pas dans ce cas, ce qui a dérouté plusieurs personnes.
- (21d) Lorsque le vocabulaire était connu cette question a été bien traitée.
- (21e) Très rarement traitée. Le cas échéant, il fallait toutefois traiter la valeur absolue avec soin.
- (22)(22a) Le caractère ouvert de cette question la rendait difficile. Beaucoup de copies contenaient en conséquence des calculs compliqués qui ne débouchaient pas.
- (22b) Très rarement traitée.
- (23) À l'exception de la première question, qui a été bien traitée lorsqu'abordée, cette fin de sujet n'a presque jamais été abordée.