

Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

ENS Paris – Épreuve orale de mathématiques 2025

Anna Ben-Hamou, Igor Kortchemski

Durée de l'épreuve. 90 minutes de préparation puis 30 minutes de passage, dont au plus 15 minutes de présentation sans intervention du jury.

Modalités. Deux exercices indépendants à préparer.

Calculatrice interdite

1 Commentaires généraux

Distribution des notes. Cette année, 61 personnes ont passé l'épreuve orale de mathématiques. La moyenne des notes s'élève à 14.3, avec un écart-type de 3.4 et une médiane de 14.5. Les notes sont distribuées comme suit.

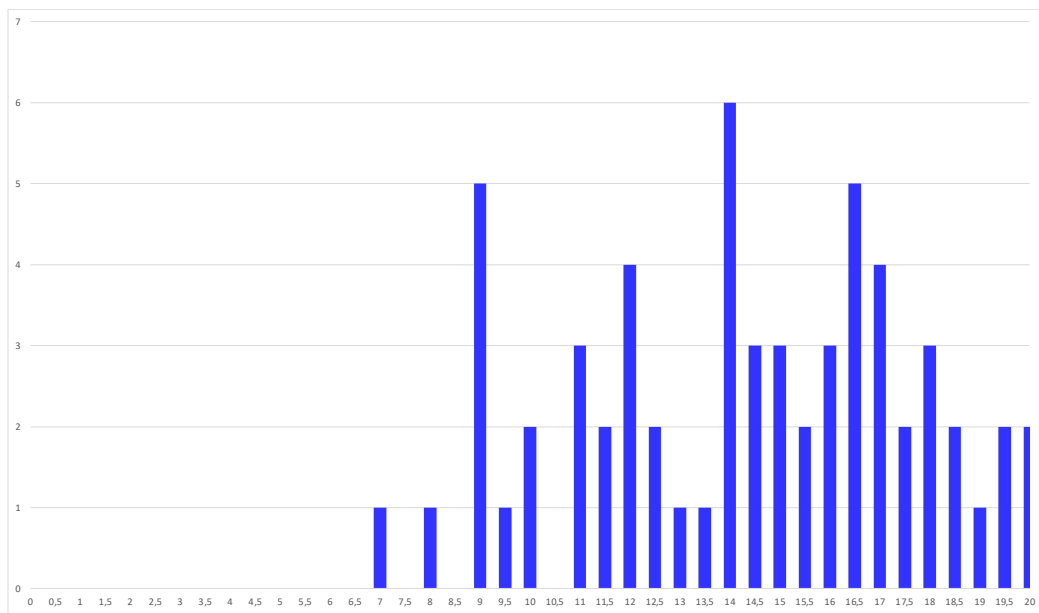


FIGURE 1 – Histogrammes des notes obtenues à l'oral.

Déroulement général de l'épreuve. Les candidates et candidats se voient remettre une planche comportant deux exercices. Ils disposent de 90 minutes pour préparer ces deux exercices. S'ensuit un oral de 30 minutes divisé en deux phases — la présentation, puis la reprise.

La phase de présentation dure jusqu'à 15 minutes maximum, au gré de la candidate et du candidat. Sans interruption de la part du jury, le candidat ou la candidate présente alors ses réponses ou pistes éventuelles concernant les questions abordées. Si cette phase atteint la quatorzième minute, un membre du jury signale alors qu'il ne reste plus qu'une minute : dans cette configuration, il s'agit non plus de viser le détail ou l'exhaustivité mais de choisir un ou deux derniers points plus importants que les autres et les évoquer sommairement. Si la présentation atteint les 15 minutes, le jury met un terme à la présentation.

La reprise, qui fait emploi de tout le temps restant de l'oral, consiste en un échange avec les deux membres du jury. Dans un esprit bienveillant, le jury pose des questions afin de clarifier certains arguments exposés en présentation et voir si, en étant accompagné, le candidat ou la candidate peut traiter certaines des questions laissées en suspens. Au fil de l'échange, il peut arriver qu'on s'éloigne un peu du sujet strictement abordé dans la planche : par exemple, s'il semble que le candidat ou la candidate a commis une certaine erreur concernant les projections orthogonales, on pourra lui demander des définitions ou résultats de cours relatifs aux projections orthogonales ; on pourra aussi poser une question qui n'est pas directement liée à l'exercice mais permet de tester spécifiquement l'erreur repérée. Dans les rares cas où une planche est terminée en présentation ou en reprise, le temps restant de la reprise est dédié à des questions supplémentaires, généralement ardues, qui prolongent la réflexion amorcée par les exercices de la planche.

Notation. La note finale a été obtenue en prenant en compte les critères suivants : connaissance du cours, autonomie sur les questions de base et les questions difficiles, absence d'erreurs grossières, réactivité et capacité à se corriger lors de la reprise, intuition et rédaction mathématique, et avancement global à l'issue de la reprise. Ces critères de notation ont amené aux types de prestations orales suivantes :

- note ≤ 7 : le cours n'est pas bien maîtrisé et plusieurs erreurs importantes sont commises.
- note entre 8 et 12 : le cours est plutôt maîtrisé et/ou les candidates ou candidats accumulent quelques erreurs, arrivent à traiter plusieurs questions de la planche, mais ne tirent pas vraiment profit de la reprise.
- note entre 13 et 15 : le cours est globalement bien maîtrisé, les candidates ou candidats ne commettent pas beaucoup d'erreurs et ont plutôt bien avancé dans les planches avec une aide conséquente du jury.
- note ≥ 16 : le cours est bien maîtrisé, et les candidates ou candidats ont bien avancé de manière autonome dans les planches et réagissent bien aux indications du jury.

Il est à souligner que certains oraux n'ayant pas traité une fraction significative des questions dès la préparation ont toutefois pu obtenir de bonnes notes en sachant exploiter les indications du jury pour parvenir à bien avancer la résolution des exercices lors de la reprise.

Nous sommes très satisfaits et agréablement surpris par le niveau général. La moyenne cette année est en hausse à 14.3 contre 13.1 l'année dernière, et un écart-type en baisse à 3.4

contre 4.1 l'année dernière. Cette différence s'explique en partie par le fait que nous n'avons pas eu de très faibles prestations avec des grosses lacunes sur des parties importantes du programme : pas de note ≤ 6 , seulement deux notes ≤ 8 . Nous n'avons pas jugé opportun d'étaler davantage les notes.

Les notes des 25 personnes classées sur liste principale s'échelonnent de 11 à 20 avec une moyenne de 16.2. Les toutes meilleures prestations relèvent d'une profonde maîtrise et intuition en mathématiques, et nous encourageons vivement ces candidates et candidats là à goûter aux enseignements du département de mathématiques de l'ENS-PSL.

Conception des planches. Chaque planche est conçue pour offrir une couverture thématique large (au moins 2 des 3 grands thèmes : algèbre, analyse, probabilités) et des questions de difficultés étalées et calibrées. On essaie également, autant que possible, de panacher questions standards et questions originales. Il est toutefois délicat de produire des planches tout à fait équivalentes : les écarts éventuels entre planches sont compensés par une notation prenant en compte ces écarts.

Présence du public. Les oraux se sont globalement bien déroulés. Le public respecte un silence total et ne manifeste aucune réaction jusqu'à la sortie du candidat. Il n'est pas bienvenu de se retourner avec insistance vers le jury, moins encore si c'est pour chercher à voir ce qu'il écrit.

2 Conseils

Dans leur immense majorité, les personnes interrogées sont bien préparées et, pour la plupart, à l'écoute du jury, réactives et agréables à interroger. Certaines prestations pourraient être améliorées en prenant en compte les points suivants.

2.1 Présentation

Gestion du tableau. Lors de la présentation, le jury n'intervient que pour annoncer, au bout de 14 minutes, qu'il reste une minute, pour mettre un terme à la présentation lorsque les 15 minutes imparties sont écoulées, ou en cas de force majeure (par exemple si les feutres fonctionnent mal). La gestion du tableau est laissée libre, cela fait partie de la présentation des résultats. Il est conseillé d'effacer le moins possible afin que le jury puisse plus facilement revenir sur certains points.

Nous rappelons que, pendant la présentation, il n'est pas nécessaire de tout écrire (notamment les détails de calculs) mais qu'il est important de noter les points clés, surtout lorsqu'il peut y avoir ambiguïté (par exemple sur une inégalité large ou stricte). Il n'est pas non plus nécessaire de recopier une donnée de l'énoncé. Séparer le tableau en 3 ou 4 et écrire normalement suffit généralement à bien gérer son tableau. Naturellement, les candidates et candidats peuvent utiliser à leur gré les notes prises durant la phase de préparation.

Pistes infructueuses. Il est bienvenu de mentionner les pistes concrètes tentées lorsqu'une question n'a pas pu être résolue. Il est tout à fait possible d'exposer un raisonnement in-

complet ou sur lequel on a des doutes, en disant très clairement quelles sont les limites du raisonnement. Ce point a été bien pris en compte par la plupart des admissibles.

Gestion du temps. Nous rappelons que, depuis 2021, la présentation dure 15 minutes maximum. Il ne faut pas chercher à utiliser absolument ces 15 minutes maximales allouées à la présentation : il est conseillé de **viser une durée comprise entre 10 et 13 minutes** pour cette phase. Rappelons que le dépassement des 15 minutes est pénalisé. Les personnes interrogées ayant excédé le temps imparti n'avaient pour la plupart pas fait l'exercice de synthèse et de hiérarchisation des résultats attendu dans cette partie. Nous conseillons de prendre un moment en préparation pour réfléchir à la gestion du temps.

Il est toujours judicieux de présenter de manière concise les étapes importantes du raisonnement. En cas de doute, le jury reviendra sur les détails lors de la reprise. À l'inverse il convient d'éviter de parler trop vite ou de ne quasiment rien écrire au tableau.

Lorsque le jury indique qu'il ne reste plus qu'une minute, la bonne conduite à adopter n'est pas d'augmenter le débit de parole ou de paniquer. Si ce qu'il vous reste à dire tient en une minute, c'est parfait. Dans le cas contraire, sélectionnez, parmi ce que vous n'avez pas eu le temps d'aborder, les points clés principaux : expliquez-les brièvement, surtout à l'oral et en n'écrivant que ce qui vous paraît vraiment essentiel, et négligez le reste.

2.2 Reprise et interaction avec le jury

Gestion du tableau. Lors de la reprise, nous encourageons à écrire au tableau, à la fois les indications du jury et les pistes de réflexion. Les formules énoncées oralement peuvent être ambivalentes et la simple écriture au tableau permettent par exemple au jury de rectifier une erreur d'interprétation. Toute prise d'initiative consistant à tenter des choses en les écrivant au tableau est fortement valorisée. À cette étape, il est important d'obtenir l'accord du jury avant d'effacer une partie du tableau.

Notes personnelles. Lors de la reprise, nous conseillons de laisser les notes de côté et de ne s'y référer que ponctuellement pour se remettre en mémoire un résultat non présenté. Nous encourageons plutôt à se concentrer sur l'échange en cours avec le jury, qui pourra rappeler tous les éléments utiles qui auraient été effacés.

Attitude du jury. Le jury, toujours bienveillant, cherche à évaluer le plus justement possible les candidates et candidats, et n'essaiera jamais de les « piéger ». En général, lorsqu'une personne est laissée sans indication en silence, c'est que le jury estime qu'elle a des chances de débloquent la situation par elle-même.

Dans la mesure du possible, le jury reste neutre dans son attitude et ne montre ni enthousiasme ni mécontentement. Ainsi, nous encourageons les candidates et candidats à ne pas chercher à interpréter les réactions du jury. Cela est valable tout au long de l'oral : il s'agit de ne jamais se décourager et de faire de son mieux jusqu'à la dernière minute. La présence de deux exercices et le découpage de l'oral en deux parties permet une évaluation large ; une difficulté passagère n'équivaut pas à une mauvaise note. Chaque année, quelques personnes connaissent un début difficile mais tirent remarquablement profit de la reprise.

Attitude des candidates et candidats. Les épreuves orales sont stressantes et le déroulement de l'oral, imprévisible par nature, peut être déstabilisant. Nous invitons les personnes interrogées à traiter le jury avec respect et à tenir compte de ses indications. Le jury peut avoir été dépassé par le rythme de certaines présentations et demander de répéter un point qui a été mentionné à l'oral. Cela ne signifie pas forcément que le point a été mal traité. A contrario, le jury demande fréquemment des précisions sur des points qui ont été traités de façon incomplète ou incorrecte. Dans ce cas, nous invitons les candidates et candidats à réagir. Se tromper est normal et le processus de correction fait partie des qualités évaluées.

Nous déconseillons les comportements suivants.

- Excès de confiance en soi. Ici, les candidates et candidats agissent comme s'ils ne comprenaient pas les questions qu'on pose, considérant les avoir déjà traitées de façon satisfaisante. Ces personnes répètent mot pour mot leurs arguments même quand le jury y revient avec insistance. Cette absence de remise en question, en plus de faire perdre beaucoup de temps, est pénalisée.
- Absence d'écoute du jury. Le jury propose une piste ou admet un résultat et le candidat passe outre et continue sur sa propre piste. Bien que cette dernière puisse aboutir dans certains cas (exceptionnels) et malgré la frustration que cela peut occasionner, nous invitons plutôt à suivre la piste proposée par le jury et à réfléchir ultérieurement à sa propre piste.
- Refus d'écrire. L'objet de la reprise est souvent de préciser les raisonnements. On demande donc d'énoncer les hypothèses des théorèmes, de traiter des cas simples, ou de construire des contre-exemples. Beaucoup de personnes ont de bonnes idées mais rechignent à écrire précisément les choses au tableau. Lorsque le jury le demande, une rédaction précise est attendue ; cela fait partie des compétences évaluées.
- Utilisation de notions hors programme. Rappelons que les « demi-souvenirs » peuvent amener à énoncer des énormités. Tous les exercices sont conçus pour être traités dans le cadre strict du programme officiel. Nous décourageons fortement l'emploi de notions et même de vocabulaire hors programme. L'utilisation de techniques hors programme n'est jamais valorisée par le jury. Nous observons de plus que ce type d'arguments est généralement mal maîtrisé. Nous proposons systématiquement d'autres pistes, plus simples et au programme, pour résoudre la question. C'est l'occasion de tester la réactivité de la personne interrogée.

3 Commentaires mathématiques

Dans cette section, on commence par un bilan de quelques écueils fréquents avant de passer à une analyse détaillée planche par planche.

Commentaires généraux.

- Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ , alors (u_n/n) tend vers 0. Ce fait est généralement acquis mais dès qu'il s'agit de l'utiliser lors d'un passage à la limite dans une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n, n)$, les candidates ou candidats sont parfois désemparés

et préfèrent garder le n dans la limite pour écrire « ℓ/n ». Voir par exemple la première planche du 27 juin.

- De nombreux candidats et candidates interprètent à tort la notion d'indépendance d'une collection de variables aléatoires comme une indépendance « deux à deux » et non « mutuelle » : rappelons que par définition l'indépendance d'une collection de variables aléatoires est une indépendance « mutuelle ».

Planche 1 du 16 juin. Pour l'exercice 1, plusieurs petites erreurs de calcul ont été commises ; elles ont pu être corrigées à la reprise. Les candidates et candidats ont rarement pensé à justifier la convergence des intégrales dans l'expression des espérances en jeu. L'exercice 2 était plus abstrait. Les questions (1) et (3) ont souvent été réussies, et la question (4), beaucoup plus difficile, nécessitait de construire judicieusement un contre-exemple.

Planche 2 du 16 juin. L'exercice 1 a été plutôt bien traité, même si la deuxième partie de la question (2) n'a jamais été traitée en autonomie. Lors de la reprise, il est apparu que le problème était celui du développement de $(\sum_{k=1}^n a_k)^2$. Le passage de la question (3)(a) à (3)(b) a aussi souvent posé problème et il a parfois été entendu que la question (3)(a) impliquait que la matrice $X^T A X$ était inversible. L'exercice 2 a été bien réussi. Les deux premières questions ont été traitées en autonomie par tous les candidats et candidates, et plusieurs ont eu les bonnes idées pour les questions (3)(a) et (3)(b), qui ont pu être menées à terme en reprise.

Planche 1 du 17 juin. Le premier exercice manipulait des inégalités de dimensions d'espaces vectoriels, partant de la formule de Grassmann dont la preuve faisait l'objet de la question (1). Cette question a posé des difficultés, notamment concernant la description de $\ker u$ (certains candidats et candidates ont écrit que $\ker u = F \cap G$). Les deux questions suivantes ont globalement été bien traitées, et pour la dernière question les candidates et candidats ont bien pensé à dériver f , mais rarement de considérer f sur $[d_{F \cap G}, \infty[$. Les deux premières questions du deuxième exercice ont été bien réussies. La plupart des questions suivantes, plus délicates, ont pu être abordées à la reprise. Pour la troisième question, plusieurs candidates et candidats ont utilisé, à tort, que les variables aléatoires $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ étaient indépendantes.

Planche 2 du 17 juin. L'exercice 1 a été globalement bien traité. Pour la question (3), presque tous les candidats et candidates ont pensé à un raisonnement par l'absurde, mais celui-ci n'a souvent abouti qu'à la reprise. L'exercice 2 était assez difficile. Pour la question (1)(a), plusieurs candidats et candidates ont réussi à montrer que les variables Y_k et Y_{k+1} étaient indépendantes mais ne savaient pas vraiment comment s'y prendre pour l'indépendance de la suite (Y_1, \dots, Y_n) . Il s'est parfois avéré lors de la reprise que la définition de l'indépendance d'une suite de variables aléatoires n'était pas très claire et qu'il y avait confusion entre indépendance (mutuelle) et indépendance deux à deux.

Planche 1 du 19 juin. Dans le premier exercice, on donnait une matrice carrée de taille 3 et il s'agissait de montrer que celle-ci était une matrice de projection orthogonale sur un plan à déterminer. Cet exercice a été plutôt bien réussi. Seule petite remarque : pour déterminer la distance d'un vecteur u au plan, peu de candidats ou candidates ont pensé à revenir à la

matrice initiale pour obtenir le projeté du vecteur. L'exercice 2 proposait un cocktail mélangeant trigonométrie avec probabilités et a pu déstabiliser certains candidats et candidates. Pour la deuxième partie de la question (2), les candidats et candidates ont cherché du côté des formules de trigonométrie alors que le résultat s'obtenait par changement de variables. En admettant cette question, une personne a néanmoins réussi à aller jusqu'au bout de l'exercice.

Planche 1 du 20 juin. Il s'agissait d'une planche difficile. Dans le premier exercice, on considérait une matrice carrée M vérifiant $M^t M M = I_n$, le but étant de conclure que $M = I_n$. Cet exercice a été globalement bien réussi, même si la deuxième question (difficile) a souvent posé problème. Le deuxième était un exercice de probabilité qui demandait, surtout pour la question (1b), de faire un peu de dénombrement. Aucun candidat n'a traité cette question parfaitement, mais certains ont néanmoins réussi à mener à bien l'exercice jusqu'au bout en admettant cette question.

Planche 1 du 23 juin. Dans le premier exercice, on s'intéressait à une matrice carrée K de la forme $K = X^t Y$ avec X et Y deux matrices colonnes, et notamment à sa diagonalisabilité. L'exercice a été traité entièrement en autonomie par plusieurs candidates et candidats, mais d'autres ont eu des difficultés dès la première question. Dans le deuxième exercice, on considérait une athlète qui tente d'effectuer des sauts de longueur successive $1, 2, 3, \dots$, la probabilité de réussir un saut de longueur n étant $1/n$. Cet exercice a été globalement bien réussi.

Planche 1 du 24 juin. Les deux premières questions du premier exercice ont été globalement bien résolues. La justification précise de la question (3) a posé des difficultés, et la question (4) n'a été discutée que très rarement. On pouvait par exemple passer par la définition de la limite avec des ε , en faisant attention au fait qu'on ne savait pas a priori que la suite convergeait. Le deuxième exercice, assez délicat, a été bien abordé avec des succès inégaux. La reprise a souvent porté sur la deuxième question pour poursuivre des calculs effectués lors de la préparation.

Planche 2 du 24 juin. Pour l'exercice 1, la question (2) a été assez discriminante. La question (3b) a été discutée à la reprise un petit nombre de fois. Les questions (1) et (3) du deuxième exercice ont été bien résolues. La monotonie de (2) a posé parfois quelques difficultés et la question (4) a pu être aboutie plusieurs fois à la reprise.

Planche 1 du 27 juin. Dans l'exercice 1, on étudiait la suite définie comme l'unique solution positive de $e^{-x} = x^n$. Les deux premières questions ont souvent été bien traitées. Pour la question 3, plusieurs candidates et candidats ont pensé à faire un raisonnement par l'absurde en supposant $\ell < 1$, mais le passage à la limite dans $e^{-u_n} = u_n^n$ a souvent été assez confus (on a pu voir $e^{-\ell} = \ell^n$ par exemple). Dans le deuxième exercice, il s'agissait de démontrer et d'appliquer une forme unilatérale de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour la question 1, presque tous les candidates et candidats ont cherché à utiliser l'inégalité de Bienaymé-

Tchebychev plutôt que l'inégalité de Markov appliquée au carré. Pour la question 2, aucun candidat n'a cherché à optimiser l'inégalité de la question précédente.

Planche 2 du 27 juin. Dans l'exercice 1, la première question a été bien traitée. Très souvent la première inégalité de (2a) a été démontrée, et la seconde, bien plus délicate, est restée inachevée même à la reprise. Une fois (2a) acquis, la question (2b) a souvent pu être résolue. Le deuxième exercice comportait plusieurs questions délicates et subtilités. Pour (2a), il fallait faire attention au fait que f était positive ou nulle (et non strictement positive). Plusieurs candidates et candidats ont proposé une disjonction de cas en fonction de si $X \geq \lambda E(X)$ pour démontrer l'inégalité ce qui n'avait pas de sens. La question (3a) a parfois été résolue, mais la question (3b), difficile, n'a jamais été abordée.

Planche 1 du 30 juin. Dans l'exercice 1, on s'intéressait à la norme d'un vecteur aléatoire X de \mathbb{R}^n dont les entrées sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Si tous les candidats et candidates ont bien obtenu l'espérance de $\|X\|^2$, le calcul de la variance a posé plus de problème : plusieurs candidats ont directement appliqué la formule de Koenigs-Huygens, ce qui, pour une somme de variables aléatoires, conduit à des calculs très fastidieux. Mais même si ce n'était pas leur premier réflexe, la plupart des candidats ont pensé à utiliser le fait que la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes était égale à la somme des variances. Un candidat ou candidate a pu traiter la question (4) en reprise. L'exercice 2 a été plutôt bien réussi, même si la dernière question, particulièrement subtile, n'a pas été traitée.

Planche 1 du 1er juillet. L'exercice 1 s'intéressait à des tirages sans remise dans une urne, et demandait de faire un peu de dénombrement. Cela a posé quelques difficultés mais celles-ci ont généralement été surmontées en reprise. Le deuxième exercice visait à démontrer qu'il n'existait pas de fonction vérifiant une certaine équation impliquant la dérivée et la dérivée seconde. Il s'agissait d'un exercice difficile mais un candidat ou candidate a pu le traiter presque entièrement en autonomie et conclure en reprise.