

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 1 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On note  $\text{id}_E$  l'application identité de  $E$

1. On dit qu'un endomorphisme  $p$  est un projecteur de  $E$  si  $p \circ p = p$ . Soit  $p$  un projecteur de  $E$ .
  - (a) Dans quel(s) cas  $p$  est-il bijectif?
  - (b) Montrer que  $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ .
  - (c) Déterminer les valeurs propres de  $p$ .
2. Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$  tels que  $p \circ q = q \circ p$ . On pose  $f = p + q$  et  $g = p - q$ .
  - (a) Le réel  $-1$  est-il une valeur propre de  $f$ ?
  - (b) Montrer que  $g$  est un projecteur de  $E$  si et seulement si  $p \circ q = q \circ p = q$ .
  - (c) Déterminer  $f^3 - 3f^2 + 2f$ .
  - (d) Déterminer les valeurs propres possibles de  $f$ .
  - (e) Montrer que  $0$  est valeur propre de  $f$  si et seulement si  $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \neq \{0_E\}$ .
  - (f) Montrer que  $2$  est valeur propre de  $f$  si et seulement si  $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \neq \{0_E\}$ .

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 1 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Un serveur brise en moyenne trois verres et une assiette par mois. Notons  $X$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de verres cassés et  $Y$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'assiettes cassées par ce serveur. On suppose que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre 3 et  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre 1.  $X$  et  $Y$  sont supposées indépendantes.

1. Donner les lois de probabilité des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .
2. Quelle est la loi de  $X + Y$  ?
3. Calculer la probabilité d'un mois sans assiette ni verre cassé.
4. Ce serveur maladroit casse aussi des bols. Notons  $Z$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de bols cassés involontairement en une année. On suppose que  $Z$  suit une loi de Poisson de paramètre 5. Si le soir du 31 décembre, le serveur n'a pas cassé au moins 5 bols dans l'année, il fête cela en brisant des bols pour avoir au moins le minimum de 5 bols cassés sur l'année. Soit  $W$  la variable aléatoire qui représente le nombre de bols cassés par an après le soir du 31 décembre.

Exprimer  $W$  en fonction de  $Z$ .

5. Donner la loi de probabilité et l'espérance de  $W$ .

---

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

---

- Planche n° 2 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soit  $N$  un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes opaques  $U_1$  et  $U_2$ , d'apparence identique et contenant chacune  $N$  boules indiscernables au toucher :

- L'urne  $U_1$  contient  $(N - 1)$  boules blanches et une boule noire.
- L'urne  $U_2$  contient  $N$  boules blanches.

1. Une première expérience aléatoire : On effectue des tirages sans remise dans l'urne  $U_1$ , jusqu'à l'obtention de la boule noire. On note  $X$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire. On note, pour tout entier naturel  $i \geq 1$  :
  - $N_i$  l'événement « on tire une boule noire lors du  $i$ -ième tirage ».
  - $B_i$  l'événement « on tire une boule blanche lors du  $i$ -ième tirage ».
  - (a) En décrivant soigneusement les événements utilisés, calculer  $\mathbb{P}(X = k)$ , pour tout  $k$  dans  $\{1, 2, 3\}$ .
  - (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X$ .
  - (c) Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.
2. Une deuxième expérience aléatoire : On choisit une des deux urnes au hasard et on tire dans l'urne choisie une par une les boules sans remise jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie. On note  $Y$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués. On note :
  - $C_1$  l'événement « on choisit l'urne  $U_1$  ».
  - $C_2$  l'événement « on choisit l'urne  $U_2$  ».

- (a) Montrer que pour tout entier  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :

$$\mathbb{P}(Y = j | C_1) = \frac{1}{N}.$$

- (b) Pour tout entier  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , calculer  $\mathbb{P}(Y = j | C_2)$ .
- (c) Montrer que :

$$\mathbb{P}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{2N} & \text{si } j \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$

- (d) Calculer l'espérance de  $Y$ .

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 2 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

1. Montrer que  $I_n$  est bien définie.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimer  $I_{n+1}$  en fonction de  $I_n$ .
3. En déduire la valeur de  $I_3$ .

---

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

---

- Planche n° 3 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Un jeu consiste à tirer une boule dans une urne contenant  $n + 1$  boules équiprobables numérotées de 0 à  $n$ . Si on tire un numéro  $k$  :

- on gagne  $k$  euros si  $k$  est pair,
- on perd  $k$  euros si ce numéro est impair.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro tiré et  $G$  le gain de ce jeu.

1. Exprimer  $G$  en fonction de  $X$ .
2. On suppose que la loi de  $X$  est uniforme.
  - (a) Le joueur a-t-il plus de chances de gagner ou de perdre de l'argent ?
  - (b) Montrer que  $\mathbb{E}(G)$ , l'espérance de  $G$ , vaut

$$\mathbb{E}(G) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k k.$$

- (c) Calculer  $\mathbb{E}(G)$  selon que  $n$  est pair ou impair.
3. Dans cette partie on suppose que la loi de  $X$  est binomiale de paramètres  $n$  et  $p \in ]0, 1[$ .
    - (a) Montrer que pour tout  $1 \leq k \leq n$  on a :

$$\frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

- (b) Montrer qu'il existe un entier  $\lambda$  que l'on précisera tel que :

$$\mathbb{E}(G) = \lambda(1-p)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left( \frac{p}{p-1} \right)^{k+1}.$$

- (c) Calculer  $\mathbb{E}(G)$ .
  - (d) Pour quelles valeurs de  $p$  le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Dans cette dernière question on suppose que l'urne contient une infinité de boules numérotées à partir de 1 et que la loi de  $X$  est une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Le jeu est-il favorable au joueur ?

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 3 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soit  $f$  la fonction définie par

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x e^{x(y^2+1)} . \end{aligned}$$

1. Justifier que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que  $f$  admet au plus un extremum local.
3. Montrer que  $f$  admet exactement un extremum local et déterminer sa nature et sa valeur.
4. (a) Soit la fonction  $g$  définie par

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x e^x . \end{aligned}$$

Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq g(x) .$$

- (b) En étudiant la fonction  $g$ , déterminer l'extremum global de  $f$ .
- (c) L'extremum peut-il être strict ?

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 4 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue une succession de tirages équiprobables d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le  $(k + 1)$ -ème tirage.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note

- $B_k$  l'événement « on tire une boule blanche au  $k$ -ème tirage »,
- $R_k$  l'événement « on tire une boule rouge au  $k$ -ème tirage ».

1. Déterminer la loi de  $X_0$ .
2. Déterminer la loi de  $X_1$ .
3. Déterminer la loi de  $X_2$ .
4. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , déterminer le support de  $X_k$ .
5. Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$  et  $j \in \llbracket 1, k + 1 \rrbracket$ .
  - (a) Pour  $i \notin \{j, j + 1\}$ , déterminer  $\mathbb{P}(X_{k+1} = i | X_k = j)$ .
  - (b) Déterminer  $\mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = j)$  et  $\mathbb{P}(X_{k+1} = j + 1 | X_k = j)$ .
  - (c) Pour tout  $i \in \llbracket 1, k + 2 \rrbracket$ , en déduire  $\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$  en fonction de  $\mathbb{P}(X_k = i)$  et  $\mathbb{P}(X_k = i - 1)$ .
6. Retrouver la loi de  $X_2$ .

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 4 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie pour tout  $n \geq 1$  par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Montrer que  $u_n$  est strictement croissante.
2. Énoncer l'inégalité des accroissements finis.
3. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}. \quad (1)$$

4. Dédire de (1) que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$u_n \geq 2 \left( \sqrt{n+1} - 1 \right).$$

5. Dédire de (1) que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$u_n \leq 2\sqrt{n}.$$

6. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}.$$

7. Montrer que  $u_n$  n'a pas de limite finie lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 5 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Pour tout entier  $n \geq 0$ , on considère la suite de terme général  $u_n$  défini par :

$$u_n = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^n(x)}{\sin(x)} dx .$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie.
2. Calculer  $u_1$ .
3. Dériver la fonction

$$\begin{aligned} [\pi/6, \pi/2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln \left( \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \right) . \end{aligned}$$

4. En déduire la valeur de  $u_0$ .
5. (a) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $n$  :

$$0 \leq u_n \leq \alpha \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n .$$

- (b) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - (c) Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n$ .
6. Montrer que pour tout entier  $n$  on a :

$$u_{n+2} = u_n - \frac{1}{n+1} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} .$$

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 5 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Un mobile se déplace sur un axe réel de la façon suivante : à l'instant 0, il est au point 0. Puis, si le mobile est à l'instant  $n$  sur le point d'abscisse  $k$ , alors à l'instant  $n + 1$ , il sera sur le point d'abscisse  $k + 1$  avec probabilité  $p \in ]0, 1[$  et en 0 sinon. On appelle  $X_n$  la variable égale à l'abscisse du mobile à l'instant  $n$ .

1. Déterminer la loi de  $X_0$ .
2. Déterminer la loi de  $X_1$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer  $X_n(\Omega)$ .
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , exprimer  $\mathbb{P}(X_n = k)$  en fonction de  $X_{n-1}$ .
5. En déduire une expression de l'espérance de  $X_n$  en fonction de  $n$  et  $p$ .

---

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

---

- Planche n° 6 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — On dispose de deux pièces truquées :

- la pièce  $A$  pour laquelle la probabilité de faire pile vaut  $p \in ]0, 1[$ ,
- la pièce  $B$  pour laquelle la probabilité de faire pile vaut  $q \in ]0, 1[$  avec  $q \neq p$ .

Un joueur peut choisir parmi ces deux pièces et effectuer autant de lancers qu'il le souhaite, mais il ne sait pas laquelle des deux pièces  $A$  ou  $B$  a le plus de chances de réaliser le côté pile. Il adopte la stratégie suivante :

- Il choisit la première pièce au hasard et la lance. S'il fait pile il relance la même pièce, sinon il effectue un lancer avec l'autre pièce.
- Il répète cette stratégie pendant tout le jeu : S'il fait pile il relance la même pièce, sinon il effectue un lancer avec l'autre pièce.

Pour tout  $i \geq 1$ , on note  $E_i$  l'événement « le  $i$ -ième tirage est fait avec la pièce  $A$  » et par  $G_i$  l'événement « le  $i$ -ième lancer est un pile ».

1. (a) Déterminer  $\mathbb{P}(E_{i+1} \mid \overline{E}_i)$ .

(b) Montrer que :

$$\mathbb{P}(E_{i+1}) = (p + q - 1)\mathbb{P}(E_i) + 1 - q.$$

(c) Pour tout  $i \geq 1$ , on pose

$$u_i = \mathbb{P}(E_i) - \frac{1 - q}{2 - p - q}.$$

Déterminer la nature de la suite  $(u_i)_{i \geq 1}$ .

(d) Déterminer  $\mathbb{P}(E_i)$  en fonction de  $p$  et  $q$ .

2. (a) Exprimer  $\mathbb{P}(G_i)$  en fonction de  $\mathbb{P}(E_i)$ .

(b) Montrer que

$$\mathbb{P}(G_i) = -\frac{(q - p)^2}{2(2 - p - q)}(p + q - 1)^{i-1} + \frac{p + q - 2pq}{2 - p - q}$$

3. Le  $i$ -ième lancer vient de donner pile. Quelle est la probabilité qu'il ait eu lieu avec la pièce  $A$  ?

4. Déterminer la limite de  $\mathbb{P}(G_i)$  quand  $i$  tend vers  $+\infty$ .

---

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

---

- Planche n° 6 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère

$$\begin{aligned} D : \quad \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P', \end{aligned}$$

où  $\mathbb{R}_n[X]$  désigne l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $n$ .

1. Montrer que  $D$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad D^k(P) = P^{(k)}.$$

3. En déduire que  $D$  est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier  $N_0$  tel que pour tout  $k \geq N_0$ ,  $D^k(P) = 0$ .
4. Déterminer la représentation matricielle  $A$  de  $D$  dans la base canonique  $\{1, \dots, X^n\}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  où  $1 : x \mapsto 1$  et pour tout  $k \geq 1$ ,  $X^k : x \mapsto x^k$ .
5. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n D^k(P)$$

est bijective, et que sa réciproque admet pour représentation matricielle dans la base canonique  $I_{n+1} - A$ , où  $I_{n+1}$  est la matrice identité d'ordre  $n+1$ .

6. On considère

$$\begin{aligned} \Delta : \quad \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto \sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} D^k(P). \end{aligned}$$

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$P(x+1) = \Delta(P)(x).$$

---

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

---

- Planche n° 7 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}.$$

2. En déduire que

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

3. En déduire un équivalent de  $H_n$ .

4. On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_1 = 1$  et pour tout  $n \geq 2$  par

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Justifier que la série de terme général  $u_n$  est convergente.

5. On considère la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  définie pour  $n \geq 1$  par

$$v_n = \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

Justifier que la série de terme général  $v_n$  est convergente.

6. Soit pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n = H_n - \ln(n)$ . Pour  $n \geq 2$ , exprimer  $f_n - f_{n-1}$ , en fonction de  $u_n$ .
7. En déduire que  $(f_n)$  converge.
8. Quel est le signe de  $u_n$  pour  $n \geq 2$ ?
9. Quel est le signe de  $v_n$  pour  $n \geq 1$ ?
10. Démontrer que, pour tout  $N \geq 2$ ,

$$\sum_{n=2}^N (\ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n)) = \ln(N+1) - \ln(N) - \ln(2).$$

11. On note, pour  $N \geq 1$ ,

$$S_N = \sum_{n=1}^N u_n \quad \text{et} \quad T_N = \sum_{n=1}^N v_n.$$

Déduire des deux questions précédentes que les suites  $(S_N)_N$  et  $(T_N)_N$  sont adjacentes.

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 7 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — On dispose d'une pièce équilibrée et on effectue des lancers de cette pièce de manière indépendante. Pour  $k$  entier supérieur ou égal à 2, on note  $X$  la variable aléatoire qui prend pour valeur  $k$  si l'on obtient pour la première fois pile puis face aux lancers  $k - 1$  et  $k$ ,  $X$  prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note

- $P_k$  l'événement « obtenir pile au  $k$ -ème tirage »,
- $F_k$  l'événements « obtenir face au  $k$ -ème tirage ».

1. Pour tout  $k \geq 2$ , déterminer  $\mathbb{P}(X = k | P_1)$ .
2. Pour tout  $k \geq 3$ , déterminer  $\mathbb{P}(X = k | F_1)$  en fonction de  $\mathbb{P}(X = k - 1)$ .
3. En déduire, pour tout  $k \geq 3$ , l'expression de  $\mathbb{P}(X = k)$  en fonction de  $\mathbb{P}(X = k - 1)$  et de  $k$ .
4. Pour tout  $k \geq 2$ , on pose  $u_k = 2^k \mathbb{P}(X = k)$ . Déterminer la nature de la suite  $(u_k)_{k \geq 2}$ .
5. En déduire la loi de  $X$ .
6. Montrer que pour tout  $q \in ]0, 1[$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

7. La variable aléatoire  $X$  admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 8 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soit  $U$  la matrice carrée d'ordre 2 dont tous les coefficients valent 1.  
On considère l'application  $\varphi$  définie par :

$$\begin{aligned}\varphi : \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \text{Tr}(UM) U .\end{aligned}$$

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer  $\varphi(U)$ .
3. Montrer que :

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(U) .$$

4. Déterminer la dimension du noyau de  $\varphi$ .
5. (a) Montrer que 0 est une valeur propre de  $\varphi$ .  
(b) Déterminer la dimension de l'espace propre associé à 0.  
(c) Trouver une base de l'espace propre associé à 0.
6. Supposons que  $\lambda$  soit une valeur propre non nulle de  $\varphi$ . Montrer que

$$E_\lambda(\varphi) \subset \text{Im}(\varphi) ,$$

où  $E_\lambda$  est l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

7. (a) Montrer que  $\varphi$  est diagonalisable.  
(b) Exhiber une base de vecteurs propres et la matrice de  $\varphi$  dans cette base.

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 8 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Déterminer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

2. Déterminer

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

3. Déterminer

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

4. En déduire

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

---

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

---

- Planche n° 9 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soient  $n \geq 3$ ,  $\mathbb{R}[x]$  l'ensemble des polynômes et  $\mathbb{R}_n[x]$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . On note  $\mathcal{B}_n = (\mathbb{1}, X, \dots, X^n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_n[x]$  où  $\mathbb{1} : x \mapsto 1$  et, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $X^k : x \mapsto x^k$ .

On considère l'application  $\varphi$  définie par

$$\varphi : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$$

$$P \mapsto \varphi(P) : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \frac{1}{4} \int_{x-2}^{x+2} P(t) dt . \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire.  
(b) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[x]$ .
- Lorsque  $n = 3$ , déterminer la matrice représentative de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}_3$ .
- On revient au cas général et on prend  $n \geq 3$  jusqu'à la fin de l'exercice.*
  - Montrer que  $A_n$ , la matrice représentative de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}_n$ , est triangulaire supérieure.
  - Déterminer le spectre de  $\varphi$ .
  - Déterminer une base des espaces propres associés aux éléments du spectre de  $\varphi$ .
  - En déduire que  $\varphi$  n'est pas diagonalisable.
  - Montrer que si  $P$  est de degré 2 alors  $P$  ne peut pas être vecteur propre de  $\varphi$ .
  - Montrer que si  $P$  est vecteur propre de  $\varphi$  de degré supérieur ou égal à 1 alors  $P'$  est aussi vecteur propre de  $\varphi$ .

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 9 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages équiprobables successifs d'une boule dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $X_n$  la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues au cours des  $n$  premiers tirages.

1. Déterminer la loi de  $X_1$ .
2. Déterminer la loi de  $X_2$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , conjecturer la loi de  $X_n$ .
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer la loi de  $X_n$ .

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 10 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Nous allons étudier la position d'un point mobile sur la droite des réels. Au temps  $t = 0$ , le point a pour abscisse 0. Après chaque seconde, le point mobile avance d'une unité, recule d'une unité ou reste sur place avec la même probabilité  $1/3$ .

On note  $M_{n,t}$  l'événement : « Le point mobile est au point d'abscisse  $n$  après  $t$  secondes ».

1. Déterminer  $\mathbb{P}(M_{0,0})$ .
2. Déterminer  $\mathbb{P}(M_{n-1,t+1}|M_{n,t})$ ,  $\mathbb{P}(M_{n,t+1}|M_{n,t})$  et  $\mathbb{P}(M_{n+1,t+1}|M_{n,t})$ .
3. Soit  $G_n$  l'événement, « Le point effectue son premier déplacement vers la gauche après exactement  $n$  secondes ».

(a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que

$$\mathbb{P}(G_n) = \frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

(b) Calculer la probabilité de l'événement : « Le point effectue au moins un déplacement vers la gauche ».

4. Soit  $D_n$  l'événement, « Le point est à une abscisse paire après  $n$  secondes ». Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $u_n = \mathbb{P}(D_n)$ .

(a) Déterminer  $u_0$ .

(b) Déterminer  $\mathbb{P}(D_{n+1}|D_n)$ .

(c) Déterminer  $\mathbb{P}(D_{n+1}|\overline{D_n})$ .

(d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en déduire que

$$u_{n+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}u_n.$$

(e) Conclure.

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 10 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soient  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$  une autre base de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrer qu'il existe un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^3$  ayant les mêmes coordonnées dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs ayant les mêmes coordonnées dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .
3. Plus généralement, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , à quelle condition existe-t-il un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^n$  ayant les mêmes composantes dans deux bases distinctes de  $\mathbb{R}^n$  ?

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 11 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

1. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ . Montrer que la fonction

$$t \mapsto f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)$$

est intégrable sur  $[0, \pi]$ .

2. Montrer que

$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt = \frac{2}{2n+1} f(0) + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt.$$

3. Montrer que

$$\left| \int_0^\pi f'(t) \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \right| \leq \int_0^\pi |f'(t)| dt.$$

4. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt.$$

5. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

6. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose,

$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt).$$

Vérifier que, pour  $t \in ]0, \pi]$ , on a

$$A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)}.$$

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 11 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soient  $a$  et  $b$  deux réels. On considère  $U_3$  la matrice carrée de taille 3 dont tous les coefficients valent 1. On définit la matrice carrée de taille 3,  $M_{a,b}$  de terme général

$$\begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer  $M_{a,b}$ .
2. Montrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $M_{a,b} = \alpha I_3 + \beta U_3$ .
3. Calculer  $M_{a,b}^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
4. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2, on considère  $U_n$  la matrice carrée de taille  $n$  dont tous les coefficients valent 1. On définit la matrice carrée de taille  $n$ ,  $M_{a,b}$  de terme général

$$\begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer  $M_{a,b}^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 12 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Une commode contient une infinité de tiroirs numérotés  $1, 2, 3, \dots$ . Un joueur ouvre les tiroirs un à un, en commençant par le premier. Chaque tiroir contient :

- soit une clé, avec probabilité  $p \in ]0, 1[$ ,
- soit rien, avec probabilité  $1 - p$ .

Le contenu de chaque tiroir est indépendant de celui des autres. Le joueur s'arrête dès qu'il trouve une clé.

1. (a) On note  $T$  la variable aléatoire donnant le numéro du premier tiroir contenant une clé. Quelle est la loi de  $T$  ?  
(b) Calculer  $\mathbb{P}(T > n)$ .  
(c) Déterminer l'espérance et la variance de  $T$ .  
(d) Le joueur parie que la clé se trouve parmi les  $k$  premiers tiroirs. Calculer la probabilité qu'il gagne son pari.  
(e) Montrer que cette probabilité tend vers 1 lorsque  $k$  tend vers l'infini.
2. En fait, certains tiroirs sont piégés : si le joueur ouvre un tiroir dont le numéro est un multiple de 5, une alarme se déclenche. On suppose que même si l'alarme sonne, le joueur continue à chercher jusqu'à ce qu'il trouve une clé.
  - (a) On note  $A$  l'événement « le joueur déclenche au moins une alarme au cours de sa recherche ». Déterminer  $\mathbb{P}(A)$  en fonction de  $p$ .
  - (b) Lorsque  $p$  tend vers 0, déterminer la probabilité que le joueur déclenche au moins une alarme.
  - (c) Quel est le nombre moyen d'alarmes déclenchées par le joueur ?

---

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

---

- Planche n° 12 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$ . On considère  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n([a, b])$ .

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(n)}(x)g(x)dx \\ = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (f^{(n-k-1)}(b)g^{(k)}(b) - f^{(n-k-1)}(a)g^{(k)}(a)) + (-1)^n \int_a^b f(x)g^{(n)}(x)dx, \end{aligned}$$

où, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^{(n)}$  désigne la dérivée  $n$ -ième de  $f$ .

2. On pose  $Q_n(x) = (1 - x^2)^n$  et  $P_n(x) = Q_n^{(n)}(x)$ .

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le degré de  $P_n$ .

(b) Montrer que, pour tout  $k \leq n - 1$ , il existe un polynôme  $A_k$  tel que

$$Q_n^{(k)}(x) = A_k(x)(x^2 - 1)^{n-k}.$$

(c) En déduire que, pour tout  $k \leq n - 1$ ,  $Q_n^{(k)}(1) = 0$ .

(d) Pour tout polynôme  $L$  de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ , déterminer

$$\int_{-1}^1 L(x) P_n(x) dx.$$

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 13 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p$  un réel de  $]0, 1[$ . On pose  $q = 1 - p$ .

On s'intéresse à une épreuve de saut en hauteur au cours de laquelle un athlète doit sauter dans l'ordre  $n$  hauteurs numérotées  $1, 2, \dots, n$ . L'athlète ne pouvant accéder à la hauteur suivante que s'il a réussi à sauter la hauteur précédente. L'épreuve s'arrête lorsque l'athlète échoue son saut à une hauteur donnée ou bien lorsqu'il a réussi à sauter les  $n$  hauteurs.

On admet que la probabilité de passer d'une hauteur à une autre est constante et égale à  $p$ , la probabilité de passer la hauteur 1 étant, elle aussi, égale à  $p$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  on dit que le niveau de l'athlète est  $k$  s'il réussit à sauter la hauteur  $k$  et échoue à sauter la hauteur  $k+1$ . On dit que le niveau de l'athlète est  $n$  s'il réussit à sauter les  $n$  hauteurs et on dit que le niveau de l'athlète est 0 s'il échoue dès la hauteur 1.

- (a) On note  $X_n$  le niveau atteint par l'athlète. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $X_n$ .  
(b) Déterminer la probabilité  $\mathbb{P}(X_n = 0)$ .  
(c) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $R_k$  l'évènement « l'athlète réussit à passer la hauteur  $k$  ». Écrire l'évènement  $(X_n = n)$  à l'aide de certains des évènements  $R_k$ .  
(d) Déterminer la probabilité  $\mathbb{P}(X_n = n)$ .  
(e) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , déterminer l'évènement  $(X_n = k)$  à l'aide de certains des évènements  $R_k$ .  
(f) Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , déterminer la probabilité  $\mathbb{P}(X_n = k)$ .
2. Vérifier que  $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_n = k) = 1$ .
3. Déterminer  $\mathbb{E}(X_n)$ , l'espérance de  $X_n$ , en fonction de  $n$  et de  $p$ .
4. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) .$$

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 13 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^n dx .$$

1. Calculer  $I_0$ ,  $I_1$  et  $I_2$ .
2. Justifier que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive et décroissante.
3. En déduire que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer une expression de  $I_{n+2}$  en fonction de  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .
5. En déduire  $I_{n+2}$  en fonction de  $I_n$ .
6. Déterminer la limite de la suite

$$\left( \frac{I_{n+1}}{I_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} .$$

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 14 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit

$$f_n : \quad [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1 + x^n}$$

et

$$J_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx .$$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Étudier les variations de la fonction  $f_n$ .
2. Montrer que  $J_n$  est bien définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Calculer  $J_2$ .
4. Pour chaque  $x \in [0, 1]$  déterminer la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini de la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ .
5. Montrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et majorée par 1.
6. Montrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.
7. Soit  $\varepsilon \in [0, 1[$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{1-\varepsilon}^1 f_n(x) \, dx \leq \varepsilon .$$

8. Soit  $\varepsilon \in [0, 1[$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{1-\varepsilon} f_n(x) \, dx \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + (1 - \varepsilon)^n} .$$

9. En déduire la limite de la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 14 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soient  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$  une autre base de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrer qu'il existe un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^3$  ayant les mêmes coordonnées dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs ayant les mêmes coordonnées dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .
3. Plus généralement, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , à quelle condition existe-t-il un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^n$  ayant les mêmes composantes dans deux bases distinctes de  $\mathbb{R}^n$  ?

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 15 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — On lance à répétition une pièce qui donne pile avec probabilité  $p \in ]0, 1[$ . On arrête les lancers dès que la face « pile » est apparue pour la deuxième fois. On note  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre total de lancers effectués. On s'intéresse à la loi de la variable aléatoire  $X$ .

1. Quel est le support de  $X$  ?
2. Soit  $n \geq 2$ . Déterminer  $\mathbb{P}(X = n)$ .
3. Montrer que pour tout  $q \in ]0, 1[$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

4. Montrer que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1.$$

5. Calculer l'espérance mathématique  $\mathbb{E}(X)$  de la variable aléatoire  $X$ .
6. Étudier qualitativement le comportement de  $\mathbb{E}(X)$  lorsque  $p$  tend vers 0 et lorsque  $p$  tend vers 1. Interpréter.

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 15 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que

$$\text{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y = x \right\}, \quad \text{rang}(B) = 3, \quad \text{rang}(AB) = 2.$$

1. Déterminer une base de  $\text{Im}(A)$ .
2.  $\text{Im}(A)$  est-elle une droite vectorielle ?
3. Discuter du nombre de solution du système suivant :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. À quelle(s) condition(s) sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  le système suivant a-t-il une solution

$$AX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ?$$

5. Soit  $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . Discuter des solutions du système

$$BX = Y.$$

6. Montrer que  $\text{Im}(AB) \subset \text{Im}(A)$ .
7. Montrer que  $\text{Im}(AB) = \text{Im}(A)$ .
8. Soit  $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . Discuter des solutions du système

$$ABX = Y.$$

9. Soit  $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que

$$NB = 0.$$

Montrer que  $N = 0$ .

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 16 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — Soit  $X$  une variable aléatoire continue de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que  $f_X$  est une densité de probabilité.
2. Calculer l'espérance de  $X$ ,  $\mathbb{E}(X)$ , et sa variance  $\text{Var}(X)$ .
3. Déterminer la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$ .
4. On définit la variable  $Y = X^2$ .
  - (a) Déterminer la fonction de répartition  $F_Y$  de  $Y$ .
  - (b) En déduire la densité  $f_Y$  de  $Y$ .
5. Soit  $W = \min(X, 1 - X)$ .
  - (a) Déterminer l'événement  $\{W \leq w\}$  pour  $w \in [0, 1]$ .
  - (b) En déduire la fonction de répartition  $F_W$ .

---

**Épreuve orale d'admission : Mathématiques**

---

- Planche n° 16 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

**Exercice.** — On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{xy} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .
3. On se place désormais sur le domaine  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ . Calculer  $f(x, x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
4. Déterminer les points critiques de  $f$ .
5. Peut-on déterminer la nature des points critiques obtenus (minimum local, maximum local, point selle) ?
6. Déterminer la valeur de  $f$  en ces points critiques.
7. Les points critiques sont-ils des minima globaux ?