Code sujet : 284

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESSEC BS – HEC Paris

MATHÉMATIQUES B/L

FILIÈRE LITTÉRAIRE

Programme ENS B/L

Mardi 28 avril 2026 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'énoncé comporte un exercice et un problème. Le mot **FIN** *marque la fin de l'énoncé.*

Exercice

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet énoncé sont définies sur cet espace.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. On pose $Y = X^2 + 1$.
On admet que Y est une variable aléatoire et on note F_Y sa fonction de répartition. On note Φ la fonction de répartition de X.

1. Donner une densité de probabilité, f, de X et tracer l'allure de son graphe.
2. Rappeler les propriétés de symétrie de Φ et la valeur de Φ en 0.
3. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}$ si $y \leqslant 1$ alors $F_Y(y) = 0$.
4. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}$ si $y > 1$ $F_Y(y) = \Phi(\sqrt{y-1}) - \Phi(-\sqrt{y-1}) = 2\Phi(\sqrt{y-1}) - 1$.
5. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.
6. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(y-1)}}{\sqrt{y-1}}\,\mathrm{d}y$ est convergente et déterminer sa valeur.
7. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$ est convergente et vaut $\sqrt{\pi}$.
8. Montrer que Y admet une espérance et la déterminer.
9. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{y-1}e^{-\frac{1}{2}(y-1)}\,\mathrm{d}y$ est convergente et déterminer sa valeur.
10. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{y}e^{-y}\,\mathrm{d}y$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Problème

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel noté $\langle\ ,\rangle$ et de la norme associée notée $\|.\|$.

On note $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Dans tout ce problème, tout vecteur $x = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3$ de $\mathbb{R}^3$ pourra être écrit $x = (x_1, x_2, x_3)$ ou bien sous la forme de la matrice-colonne de ses composantes dans la base $\mathcal{B}$: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Pour tout couple de vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$x \wedge y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2\,y_3 - x_3\,y_2 \\ x_3\,y_1 - x_1\,y_3 \\ x_1\,y_2 - x_2\,y_1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, avec les notations précédentes, $x \wedge y$ est le vecteur donné par

$$x \wedge y = (x_2\,y_3 - x_3\,y_2, x_3\,y_1 - x_1\,y_3, x_1\,y_2 - x_2\,y_1)$$

ou encore

$$x \wedge y = (x_2\,y_3 - x_3\,y_2)\varepsilon_1 + (x_3\,y_1 - x_1\,y_3)\varepsilon_2 + (x_1\,y_2 - x_2\,y_1)\varepsilon_3$$

Partie I.

1. (a) Déterminer $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_2$ et $\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_3$.
   (b) Déterminer $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3$, $\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_1$ et $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3$.
2. Dans cette question, on pose $u = (1,0,2) \in \mathbb{R}^3$, $v = (2,1,0) \in \mathbb{R}^3$ et $w = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Calculer $u \wedge v$ puis $(u \wedge v) \wedge w$.
   (b) A-t-on $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$?
3. Dans cette question, on considère les trois vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ et $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Calculer $x \wedge x$.
   (b) Comparer $x \wedge y$ et $y \wedge x$.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Exprimer $(\lambda x) \wedge y$ en fonction de $x \wedge y$ et de λ.
   (d) Exprimer $x \wedge (y + z)$ en fonction de $x \wedge y$ et de $x \wedge z$.
   (e) Exprimer $(x + y) \wedge z$ en fonction de $x \wedge z$ et de $y \wedge z$.
   (f) Montrer que les vecteurs x et $x \wedge y$ sont orthogonaux.
   Est-ce aussi le cas des vecteurs y et $x \wedge y$?
4. (a) On pose $w = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ et
   $$E = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x \wedge w = (0,0,0)\}.$$
   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
   (b) On pose $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul et
   $$F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x \wedge a = (0,0,0)\}.$$
   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
5. Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ et $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que
   $$x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z.$$
   Trouver une formule similaire pour
   $$(x \wedge y) \wedge z.$$

Partie II.

Dans toute la suite du problème, $u = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur fixé de norme 1.
On note f l'application définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x) = u \wedge x.$$

On note $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ l'application identité sur $\mathbb{R}^3$.

6. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer $f(u)$. En déduire une première valeur propre de f et une base du sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer le rang de f.
   (d) Montrer que la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) La matrice M est-elle inversible ?

7. On note p l'application définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \qquad p(x) = x - \langle u, x\rangle u.$$

   (a) Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculer $p(u)$.

   (c) Montrer que p est une projection de $\mathbb{R}^3$.

   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

   (e) Montrer que $\mathrm{Im}(p) = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$.

   (f) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

   (g) Montrer que p est une projection orthogonale.

8. (a) Écrire la matrice P de l'endomorphisme p dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Exprimer M^2 en fonction de P.

   (c) Exprimer M^3 en fonction de M, puis exprimer M^4 en fonction de M^2.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression de M^{2n+1} en fonction de M et l'expression de M^{2n+2} en fonction de M^2.

9. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de P. La matrice P est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de M. La matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Partie III.

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

   où $g^{(k)}$ est la dérivée k ième de g.

   (b) Montrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

   (c) Montrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ (-1)^{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ est pair .} \end{cases}$$

   (d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \cos^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\ .$$

   (e) Montrer que, pour tout réel x, la série de terme général $\dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ converge avec

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\ .$$

On montrerait de même que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ converge avec

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \,.$$

On ne demande pas de démontrer cette seconde formule.

(f) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n)!} = \frac{1-\cos(x)}{x^2} \,.$$

11. On considère la matrice M introduite dans la Partie II.

(a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{M^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{M^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} M^2.$$

(b) On note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^{2n+1}}{(2n+1)!} = \left(\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right) M$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M^{2n}}{(2n)!} = \left(\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \right) M^2.$$

Expliciter deux réels α et β, à exprimer à l'aide des fonctions cos et sin tels que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^{2n+1}}{(2n+1)!} = \alpha M \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M^{2n}}{(2n)!} = \beta M^2.$$

(c) On définit l'exponentielle de la matrice M en posant, avec les notations précédentes :

$$\exp(M) = I_3 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M^{2n}}{(2n)!} \,.$$

On appelle $\exp(f)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\exp(M)$.
Donner l'expression de $\exp(M)$ comme une combinaison linéaire de I_3, M et M^2, puis en déduire l'expression de $\exp(f)$ comme une combinaison linéaire de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, f$ et f^2.

Partie IV.

On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par la formule suivante

$$g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} + \sin(1) f + (1 - \cos(1)) f^2$$

où f est l'endomorphisme introduit dans la Partie II.
On admet qu'il existe des vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ et $w \in \mathbb{R}^3$ tels que la famille $\mathcal{U} = (u, v, w)$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ avec

$$v \wedge w = u.$$

12. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$.
13. Déterminer $f^2(v)$ et $f^2(w)$.
14. Déterminer $g(u)$, $g(v)$ et $g(w)$.
15. (a) Écrire la matrice G de l'endomorphisme g dans la base $\mathcal{U}$.
    (b) On note G^T la transposée de G. Calculer $G^T G$. Qu'en déduit-on ?

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1216 – D'après documents fournis