Décrets, arrêtés, circulaires

TEXTES GÉNÉRAUX

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'ESPACE

Arrêté du 9 mars 2026 modifiant l'arrêté du 25 mars 2013 relatif aux objectifs de formation des classes préparatoires littéraires aux grandes écoles Lettres et sciences sociales

NOR : *ESRS2606914A*

La ministre des outre-mer et le ministre de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'espace,

Vu le code de l'éducation ;

Vu l'arrêté du 27 juin 1995 modifié relatif à la nature des classes composant les classes préparatoires littéraires aux grandes écoles ;

Vu l'arrêté du 25 mars 2013 modifié relatif aux objectifs de formation des classes préparatoires littéraires aux grandes écoles Lettres et sciences sociales ;

Vu l'arrêté du 27 novembre 2020 modifié portant extension de dispositions relatives à l'enseignement supérieur dans les îles Wallis et Futuna, en Nouvelle-Calédonie et en Polynésie française et relatif aux attributions des recteurs de région académique ;

Vu l'avis du Conseil supérieur de l'éducation en date du 4 décembre 2025 ;

Vu l'avis du Conseil national de l'enseignement supérieur et de la recherche en date du 20 janvier 2026,

Arrêtent :

Art. 1er. – L'arrêté du 25 mars 2013 susvisé est ainsi modifié :

1° Les objectifs de formation et le programme de mathématiques de première et seconde années des classes préparatoires littéraires Lettres et sciences sociales figurant en annexe de l'arrêté du 25 mars 2013 susvisé sont remplacés par ceux figurant en annexe du présent arrêté ;

2° Après l'article 2, il est inséré un article 2-1 ainsi rédigé :

« *Art. 2-1.* – Le présent arrêté est applicable dans les îles Wallis et Futuna et en Nouvelle-Calédonie dans sa version résultant de l'arrêté du 9 mars 2026 modifiant l'arrêté du 25 mars 2013 modifié relatif aux objectifs de formation des classes préparatoires littéraires aux grandes écoles Lettres et sciences sociales. »

Art. 2. – I. – Les objectifs de formation et le programme de première année du présent arrêté entrent en vigueur à la rentrée universitaire 2026, et ceux relatifs à la seconde année à la rentrée universitaire 2027.

II. – En Nouvelle-Calédonie, les objectifs de formation et le programme de première année du présent arrêté entrent en vigueur à la rentrée universitaire 2027, et ceux relatifs à la seconde année à la rentrée universitaire 2028.

Art. 3. – Le 26° du II de l'article 2 de l'arrêté du 27 novembre 2020 susvisé est abrogé.

Art. 4. – Le présent arrêté sera publié au *Journal officiel* de la République française.

Fait le 9 mars 2026.

Le ministre de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'espace,
Pour le ministre et par délégation :
Le sous-directeur de la stratégie et qualité des formations,
L. Régnier

La ministre des outre-mer,
Pour la ministre et par délégation :
La directrice générale des outre-mer,
A.-G. Baudouin

Classes préparatoires B/L
Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule

Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important dans la société et ont une importance grandissante dans les sciences humaines et sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique…) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable. L'objectif de ce programme est de permettre de manière équilibrée

- une formation par les mathématiques en tant que telles ;
- l'acquisition d'outils utiles notamment aux sciences sociales et à l'économie.

L'objectif de la formation dans les classes préparatoires B/L n'est pas de former des professionnels des mathématiques. L'enseignement de mathématiques concourt à structurer la pensée des étudiants, à développer leurs capacités d'imagination et d'abstraction, et à les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse…). Il permet aux étudiants d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel. L'état de l'art en sciences sociales et économie a été un guide important pour donner aux étudiants de B/L les bases dont ils auront besoin pour aller plus loin. Le programme définit les objectifs de l'enseignement de ces classes et décrit les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Il précise également certains points de terminologie et certaines notations. Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation au concours.

Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires B/L permet de développer chez les étudiants les compétences générales suivantes :

- Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates : savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- Modéliser : savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes notamment issus de problèmes de sciences sociales ou économiques) et les traduire en langage mathématique.
- Interpréter : être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- Raisonner et argumenter : savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques : savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace.
- Communiquer par écrit et oralement : comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

Architecture des programmes

Par rapport au programme précédent, le programme d'algèbre linéaire a été précisé, afin d'éviter notamment la confusion entre un endomorphisme et la matrice qui le représente dans une base donnée. En analyse, les outils de comparaison pour les suites et pour les fonctions ont été ajoutés, et sont utilisés pour l'étude de séries et d'intégrales impropres. La convergence absolue pour les séries et pour les intégrales est introduite. Cette notion servira uniquement à montrer qu'une série ou une intégrale à termes positifs et négatifs est convergente. La régression linéaire et la notion de coefficient de corrélation ont été supprimées. Au sein de chaque année, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement. Le programme tient compte de l'évolution des programmes de Terminale tout en maintenant une exigence intellectuelle élevée adaptée aux étudiants de la filière B/L et à la place que prennent aujourd'hui les techniques quantitatives en sciences humaines et sociales. Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus et des exemples d'applications.

Première année

Bases de raisonnement et vocabulaire ensembliste

Concernant cette partie, le vocabulaire doit être connu et un modeste savoir-faire est attendu. Aucune difficulté théorique ne sera soulevée. Les notions peuvent n'être introduites qu'en situation sans faire l'objet de chapitres spécifiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
1) Rudiments de logique	
Connecteurs (et, ou, non, implique, équivalent) et quantificateurs ($\forall$, $\exists$).	Les quantificateurs ne doivent pas être employés en guise d'abréviation.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction de cas, par contraposition, par l'absurde. Notions de condition nécessaire et condition suffisante.	Introduits sur des exemples.
2) Vocabulaire ensembliste	
Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie d'un ensemble.	On pourra employer indifféremment les termes partie et sous-ensemble, mais les deux doivent être connus des étudiants.
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence, $E \setminus A$ et $\overline{A}$ pour le complémentaire.
Lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques. Distributivité, lois de De Morgan.	
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	Exemple de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$.
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
3) Applications	
Application d'un ensemble dans un autre. Graphe d'une application.	Le point de vue est informel : se donner une application de E dans F, c'est se donner, pour tout élément de E, un unique élément de F appelé son image. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notation $\mathscr{F}(E,F)$.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	
Image directe d'une partie.	Notation $f(A)$.
Composition.	Notation $f \circ g$.
Injection, surjection.	
Bijection, réciproque d'une bijection.	Notation f^{-1}.
4) Les nombres entiers	
Notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.	Toute construction ou axiomatique est hors programme. On pourra cependant faire remarquer que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
Raisonnement par récurrence : Principes de récurrence simple, double, forte.	Ces principes seront introduits sur des exemples et ne seront pas démontrés.
Ensemble dénombrable.	Défini comme étant en bijection avec $\mathbb{N}$. On se contentera d'exemples très simples comme $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{Z}$, sans développement théorique.

Nombres réels, complexes, et calculs usuels

Là aussi, un modeste savoir-faire est attendu et aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

1) La droite réelle

Toute construction ou axiomatisation de $\mathbb{R}$ est exclue.

Propriétés élémentaires des opérations + et × sur $\mathbb{R}$. Manipulation d'inégalités.	
Intervalles.	On donne la définition basique des différents intervalles (fermé, ouvert, semi-ouvert). La notion de convexité n'est pas évoquée. Un intervalle non vide fermé borné est appelé un « segment ».
Valeur absolue, inégalité triangulaire.	Inégalités $\lvert x\rvert - \lvert y\rvert \leqslant \lvert x-y\rvert \leqslant \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$. Visualisation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$.
Parties majorées, minorées, bornées, majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.	L'existence d'une borne supérieure (inférieure) pour toute partie non vide et majorée (minorée) de $\mathbb{R}$ est admise. Notations sup, inf, max, min.

2) Sommes et produits, coefficients du binôme

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum\limits_{i\in I} a_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $\prod\limits_{i\in I} a_i$, $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum\limits_{k=1}^{n} k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$, $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.	Nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$.
Relations $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$	Triangle de Pascal.
Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	

3) Le plan complexe

La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme. Les nombres complexes ne figurent pas dans ce programme pour eux-mêmes mais seulement comme outils pour montrer des formules trigonométriques. On se limitera à cet usage dans les exercices.

Partie réelle, partie imaginaire, conjugué d'un nombre complexe.	Interprétation géométrique.
Opérations élémentaires sur les nombres complexes.	En particulier, mise d'un quotient sous forme $a + \mathrm{i}b$
Brève extension du calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	
Module d'un nombre complexe.	Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$.
Égalité $\lvert z\rvert^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire.	
Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Formules d'Euler et de Moivre.	
Lien avec les formules trigonométriques.	Les formules exigibles sont $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\tan(a+b)$ (en particulier, $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$), ainsi que les formules de symétrie : $\cos(\pi + x)$, $\cos(-x)$, etc.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Arguments et forme trigonométrique $re^{i\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations de degré 2 à coefficients réels.	

Suites et séries de nombres réels

Comme dit dans le préambule, ce programme n'impose pas l'ordre des chapitres. Le professeur est libre de traiter les suites et séries après avoir avoir traité les limites dans le cadre des fonctions d'une variable réelle.

On ne confondra pas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec le terme u_n. Cependant, par abus d'écriture, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pourra être notée (u_n).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
1) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Les exercices nécessitant un recours à la définition ne sont pas dans l'esprit du programme.
Unicité de la limite.	Notations $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers ℓ, il en est de même de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.	Les suites extraites en général ne seront pas évoquées, cependant les étudiants doivent savoir que si u_n tend vers ℓ, il en est de même de u_{n+1}, u_{n-1}, u_{2n}, u_{2n+1} etc.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Passage à la limite dans une inégalité.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
2) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone.	Démonstration non exigible.
Théorème des suites adjacentes.	
3) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples.	Aucun résultat général n'est exigible.
Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.	On pourra se limiter aux cas où le discriminant est positif ou nul. Ces suites pourront être vues dans le cours sur les espaces vectoriels, et on pourra admettre les formules de résolution.
4) Comparaisons asymptotiques	
Relations de négligeabilité, d'équivalence.	Notations $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(u_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. On pourra aussi écrire $v_n = \mathrm{o}(u_n)$ et $v_n \sim u_n$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Lien entre ces relations.	La relation $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(u_n)$ est définie à partir du quotient $\dfrac{v_n}{u_n}$ sous l'hypothèse que la suite (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Pour la relation $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, on donne les deux formes $\dfrac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n + \mathrm{o}(u_n)$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs.
Comparaison en termes de o de $\ln^{\alpha}(n)$, n^{β}, a^n et $n!$.	Ces résultats pourront être en partie admis, et seront revus plus tard.
Règles usuelles de manipulation des équivalents et du symbole o. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	

5) Séries de réels

Sommes partielles d'une série à termes réels. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Séries à termes positifs ou nuls Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.	
Convergence des séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^a}$	Résultat admis, la démonstration par comparaison avec l'intégrale sera traitée en exercice le moment venu.
Pratique de la comparaison d'une série à termes positifs à une série de Riemann.	
Séries absolument convergentes à termes réels Une série absolument convergente est convergente.	Résultat admis.
Critère de d'Alembert.	
Série exponentielle $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.	On prouvera la convergence absolue, la valeur de la somme sera admise.

Algèbre linéaire

Si les espaces vectoriels sont définis de façon générale, on pourra mettre l'accent sur les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$, avec des exemples en dimension 2 ou 3 visant à développer l'intuition géométrique. Les exemples et exercices se limiteront toujours à la dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
1) Calcul matriciel et systèmes linéaires	
Matrices et opérations sur les matrices	
Matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.	Ensemble noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Addition, multiplication par un scalaire, propriétés élémentaires.	
Produit matriciel ; associativité, distributivité sur l'addition.	
Transposée d'une matrice.	Notation ${}^tA$.
Transposée d'une somme, transposée d'un produit.	
Cas des matrices carrées :	
Matrice carrée d'ordre n.	Ensemble noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Matrice unité (ou identité) d'ordre n.	Notation I_n.
Matrices triangulaires, matrices diagonales, matrices scalaires.	
Puissance n-ième d'une matrice carrée.	
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.	
Matrices inversibles. Inverse d'un produit.	Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible lorsqu'il existe B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = BA = I_n$. Le fait que l'inversibilité d'un seul côté suffit sera vu plus tard.
Déterminant des matrices carrées d'ordre 2.	Uniquement dans ce cas. Une matrice d'ordre 2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
Systèmes linéaires	
Définition, écriture matricielle $AX = Y$.	
Système homogène.	
Méthodes de résolution par substitution et combinaisons linéaires d'équations.	
Méthode du pivot de Gauss.	Elle sera présentée sur des exemples simples, aucune théorie générale n'est exigible.
Si un système homogène a plus d'inconnues que d'équations, il admet des solutions non triviales.	Ce résultat pourra être utile pour démontrer les théorèmes de la dimension, lesquels théorèmes permettront d'affiner la compréhension des systèmes.
Système de Cramer. Application de la résolution du système $AX = Y$ pour obtenir l'inverse de A.	
2) Espaces vectoriels	
Définitions	
Définition d'un espace vectoriel.	Exemples, dont $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Définition d'une combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	
Définition et caractérisation d'un sous-espace vectoriel.	
Sous-espace engendré par n vecteurs.	Notation $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.
Applications linéaires	
Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme.	Notations $\mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{L}(E)$ et $\mathrm{GL}(E)$.
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, isomorphisme réciproque.	$\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.
Noyau et image d'une application linéaire.	Pour f dans $\mathscr{L}(E,F)$, $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité en termes de noyau et d'image.	
Dimension et bases	
Dans le cadre des familles finies, définition d'une famille libre et d'une famille génératrice.	
Base d'un espace vectoriel. Composantes (ou coordonnées) d'un vecteur dans une base.	En restant toujours dans le cadre des familles finies.
Tout espace vectoriel possédant une famille génératrice finie possède une base. Toutes les bases ont le même cardinal, appelé dimension de E et noté $\dim E$.	
Théorème de la base incomplète. Si $\dim E = n$, toute famille libre de vecteurs de E a au plus n éléments, toute famille génératrice de vecteurs de E a au moins n éléments, et une famille de n vecteurs de E est libre si et seulement si elle est génératrice. Si F est un sous espace vectoriel d'un espace E de dimension n, alors F est de dimension inférieure ou égale à n, avec égalité si et seulement si $F = E$.	
Définition du rang d'une famille (finie) de vecteurs.	
Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs d'une base.	Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et si $v_1, \ldots, v_n$ sont des vecteurs de F, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(e_i) = v_i$.
Théorème du rang.	Si E est de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $n = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.
Corollaire : si $\dim E = \dim F$ et si f appartient à $\mathscr{L}(E, F)$, alors f est injective si et seulement si f est surjective.	
Espaces isomorphes. Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.	
Matrice d'une application linéaire	
Définition de la matrice, dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$, d'une application linéaire de E dans F. Traduction de l'égalité $y = f(x)$ par l'égalité $Y = AX$. Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires. Cas des endomorphismes, lien entre bijectivité et inversibilité de la matrice dans une base.	
Application aux conditions d'inversibilité d'une matrice carrée.	A est inversible si et seulement si le système $AX = 0$ n'a que la solution triviale, si et seulement si elle est inversible à droite, si et seulement si elle est inversible à gauche.
Changement de bases	
Matrice de passage, inversibilité et inverse de cette matrice.	
Formule de changement de base pour les composantes d'un vecteur.	Si un vecteur x est représenté par une colonne X dans une base $\mathscr{B}$ et par une colonne X' dans une base $\mathscr{B}'$, et si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, alors on a $X = PX'$.
Formule de changement de bases pour la matrice d'une application linéaire.	Si f est représentée par une matrice A dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ et par une matrice A' dans les bases $\mathscr{B}'_E$ et $\mathscr{B}'_F$, si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$ et Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_F$ à $\mathscr{B}'_F$, alors on a $A' = Q^{-1}AP$.
Cas particulier d'un changement de base pour la matrice d'un endomorphisme.	La formule devient $A' = P^{-1}AP$.
Définition des matrices équivalentes et des matrices semblables.	Deux matrices semblables ont même trace.
Définition du rang d'une matrice : c'est le rang de la famille de ses colonnes.	C'est donc le nombre maximum de colonnes formant une famille libre.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang. Application : A et et ${}^tA$ ont même rang. Le rang d'une matrice est donc aussi le rang de la famille de ses lignes.	

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité

Les fonctions usuelles $x \mapsto x^a$, ln, exp, sin, cos, tan *ont été en principe vues dans les classes précédentes. Leurs propriétés seront rappelées mais ne feront pas l'objet de démonstrations.*
Les fonctions considérées ici sont à valeurs réelles et sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, ou sur un tel intervalle privé d'un point. On ne soulèvera pas de difficultés, l'objectif principal est de savoir étudier une fonction simple, tracer et interpréter son graphe. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains des résultats qui sont les adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Domaine de définition, tableau de variations, graphe d'une fonction. Graphe des fonctions $x \mapsto \lvert x\rvert$, $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, ln, exp, sin, cos, tan. Fonctions périodiques, paires, impaires, majorées, minorées, bornées. Fonctions monotones, strictement monotones.	On distinguera le réel $f(x)$ de la fonction f, qui pourra être notée $x \mapsto f(x)$. Ces graphes serviront d'illustration aux concepts introduits dans cette section.

1) Limites en un point

Dans ce paragraphe, a désigne un point appartenant à l'intervalle I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$), et la fonction f est définie sur un domaine D égal à I ou à $I \setminus \{a\}$. Le professeur a la liberté de procéder progressivement pour aboutir finalement à une telle situation générale.

Limite (finie ou infinie) au point a.	Les définitions seront interprétées graphiquement et illustrées par des exemples.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si $a \in D$ et si f a une limite en a, cette limite est $f(a)$ et on dit alors que f est continue en a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $f(x) \underset{\substack{x\to a\\x>a}}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ ou $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Opérations algébriques sur les limites. Limites et composition (de deux fonctions ou d'une fonction et d'une suite). Passage à la limite dans des inégalités. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\beta}(\ln(x))^{\alpha}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\beta}\mathrm{e}^{-\gamma x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\beta}\lvert\ln(x)\rvert^{\alpha}$.	Démonstration non exigible.

2) Comparaisons asymptotiques

Relations de négligeabilité, d'équivalence, en un point a.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.
Lien entre ces relations. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $(\ln(x))^{\alpha}$, x^{β}, $\mathrm{e}^{\gamma x}$ quand x tend vers $+\infty$, et de $\lvert\ln(x)\rvert^{\alpha}$, $x^{-\beta}$ quand x tend vers 0^+.	La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas (sauf éventuellement en a). Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}(g(x))$.
Règles usuelles de manipulation des équivalents et du symbole o.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	

3) Fonctions continues

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Continuité, opérations sur les fonctions continues.	
Les fonctions classiques $x \mapsto \lvert x\rvert$, $x \mapsto x^a$, ln, exp, sin, cos et tan sont continues sur leur domaine de définition.	La continuité est admise pour exp, sin, cos. Elle sera démontrée pour ln en tant que fonction réciproque de exp.
Exemples de prolongement par continuité.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
Cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : détermination explicite de l'intervalle image.	Si f est continue et strictement croissante sur $[a,b[$, l'intervalle image est $[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$, autres cas analogues. On fera remarquer que, f étant injective, elle réalise une bijection sur son image.
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.	Résultat admis. Il en découle qu'une fonction continue sur un segment admet un maximum et un minimum.
Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle, sa réciproque, définie sur l'intervalle image, est continue et strictement monotone.	On pourra admettre la continuité. La fonction arctan sera introduite comme exemple.
Le graphe de la réciproque est obtenu par symétrie.	

4) Dérivées

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dérivée, dérivée à gauche, dérivée à droite, interprétation graphique.	La dérivabilité implique la continuité.
Équation de la droite tangente au graphe en un point.	
Fonction dérivée.	
Cas des fonctions classiques ln, exp, sin, cos, $x \mapsto x^a$.	
Méthodes de calcul (linéarité, produit, quotient, composition).	
Dérivée de la fonction réciproque.	Application au calcul de la dérivée de arctan.
Développement limité d'ordre 1.	
Dérivée et extremums.	Une fonction dérivable sur $[a,b]$ atteint son minimum en un point x_0. Si $x_0 \in]a,b[$ alors $f'(x_0) = 0$, si $x_0 = a$ alors $f'(a) \geqslant 0$, si $x_0 = b$ alors $f'(b) \leqslant 0$. Exemples. On fera remarquer qu'un point critique (c'est- à-dire un point où la fonction dérivée s'annule) n'est pas forcément un extremum.
Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis.	Démonstration avec ce qui précède.
Inégalité des accroissements finis.	On donnera les versions de l'inégalité pour $m \leqslant f' \leqslant M$ et pour $\lvert f'\rvert \leqslant k$. Exemples d'application à la convergence de suites récurrentes.
Utilisation de la dérivée pour l'étude des variations d'une fonction f dérivable sur un intervalle I :	
La fonction f est croissante (resp. décroissante, constante) sur l'intervalle I si et seulement si sa dérivée est positive ou nulle (resp. négative ou nulle, identiquement nulle).	Par conséquent, deux primitives sur un intervalle d'une même fonction diffèrent d'une constante.
Une fonction croissante dont la dérivée ne s'annule qu'en un nombre fini de points est strictement croissante.	
Dérivées d'ordre supérieur, fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, $\mathscr{C}^\infty$.	Aucun résultat n'est exigible, en particulier la formule de Leibniz est hors-programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
5) Intégration	
Définition, lorsque $a < b$, de l'intégrale entre a et b d'une fonction continue sur $[a,b]$: c'est la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la somme de Riemann $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.	L'existence de cette limite finie est admise mais sera illustrée graphiquement. Cette définition permet d'interpréter l'intégrale entre a et b comme l'aire algébrique sous la courbe.
Extension à la situation $a \geqslant b$.	
Propriétés de l'intégrale : positivité, linéarité, relation de Chasles, monotonie.	La relation de Chasles pourra être admise après illustration graphique.
Inégalité triangulaire : $\left\lvert \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(t)\rvert \mathrm{d}t$.	
Pour une fonction continue et positive il y a équivalence entre intégrale nulle et fonction identiquement nulle.	Ce résultat pourra être prouvé directement ou avec le théorème suivant.
Théorème fondamental de l'intégration : si f est continue, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f.	
Pour toute primitive F de f, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.	
Primitives des fonctions exp, sin, cos, $x \mapsto x^a$, $x \mapsto \frac{1}{x+a}$ et de la fonction ln.	Pour la fonction ln, on pourra attendre les intégrations par parties.
Calcul d'intégrales : intégration par parties, changements de variable.	Il n'est pas attendu des étudiants qu'ils sachent trouver eux-mêmes les bons changements de variable, sauf dans quelques cas simples comme les changements affines.

Probabilités

L'esprit du programme de probabilités est de familiariser les étudiants au concept de variables aléatoires et de leur indépendance.

Concernant les sommes infinies, la théorie des familles sommables n'est pas au programme. Mais pour la généralité des énoncés du cours, on donnera brièvement un sens à l'éventuelle convergence absolue et somme d'une famille dénombrable de réels, sans soulever de problèmes théoriques.
Par souci de précision, on pourra, si on le juge utile, admettre le théorème suivant :
Soit I un ensemble dénombrable, indexé par $\mathbb{N}$ sous la forme $I = \{\varphi(n),\ n \in N\}$ où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans I. Si la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument, alors pour toute autre bijection ψ de $\mathbb{N}$ dans I, $\sum u_{\psi(n)}$ converge absolument et $\sum u_{\varphi(n)} = \sum u_{\psi(n)}$. On notera alors $\sum_{i \in I} u_i$ cette somme et on dira qu'elle converge absolument.
Dans cette situation, on admettra que toutes les opérations (somme, produit, regroupement par paquets, etc.) sont licites. Aucune difficulté ne sera soulevée sur ces notions, qui ne sont pas exigibles des étudiants. Les exemples et exercices devront impérativement se limiter à des situations où les ensembles des valeurs des variables aléatoires sont suffisamment simples pour que les espérances soient naturellement vues directement comme des sommes de séries absolument convergentes.

Enfin, concernant le cas fini, il donne un contexte dans lequel certaines des propriétés importantes peuvent être démontrées de manière simple, mais il ne doit pas être une source d'exercices de dénombrement difficiles.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
1) Événements et probabilités	
Univers Ω, ensemble $\mathscr{A}$ des événements.	On précisera sans soulever de difficultés que l'ensemble $\mathscr{A}$ est un ensemble de parties de Ω, contenant Ω, stable par passage au complémentaire et par réunion finie ou dénombrable.
Conjonction (A et B) et disjonction (A ou B) de deux événements, événement contraire, événements incompatibles, système complet d'événements.	Lien avec les opérations ensemblistes. On mentionnera que l'intersection d'une famille finie ou dénombrable d'événements est un événement. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans Ω.

Contenus	Capacités & Commentaires
Une probabilité sur Ω est une application $\mathrm{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$, telle que $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ et pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints, $\mathrm{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i)$.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
Probabilité conditionnelle sachant un événement B de probabilité non nulle : $\mathrm{P}(A\|B) = \mathrm{P}_B(A) = \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.	On remarquera que P_B est une probabilité sur Ω.
Formule des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	On donnera des applications concrètes de ces formules.

2) Variables aléatoires discrètes

On considère ici les variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable K contenu dans $\mathbb{R}$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Une variable aléatoire à valeurs dans K est une application $X : \Omega \to K$ telle que pour tout x de K, l'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$ est un événement.	L'événement $\{\omega\in\Omega,\ X(\omega)=x\}$ est noté $(X = x)$ ou $[X = x]$. On introduira de même les notations $(X \leqslant x)$, $(X \in A)$ etc.
$\big((X = x)\big)_{x\in K}$ est un système complet d'événements.	Pour toute partie A de K, $\mathrm{P}(X \in A) = \sum_{x\in A} \mathrm{P}(X = x)$.
Donner la loi de la variable aléatoire discrète X, c'est donner les $\mathrm{P}(X = x)$ pour x dans K.	
Fonction de répartition.	$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x)$.
Variable de Bernoulli, loi de Bernoulli.	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. L'indicatrice de l'événement A (notée $\mathbb{1}_A$) suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{P}(A)$.
Loi uniforme sur un ensemble fini.	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{U}(K)$

3) Moments des variables aléatoires discrètes

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans K.

Contenus	Capacités & Commentaires
Espérance Si K est fini, l'espérance de X est toujours définie et vaut $\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in K} x\mathrm{P}(X = x)$. Si K est dénombrable, on dit que X admet une espérance lorsque la somme $\sum_{x\in K} x\mathrm{P}(X = x)$ est absolument convergente, et dans ce cas, l'espérance de X est $\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in K} x\mathrm{P}(X = x)$.	Lorsque Ω est fini, on a aussi $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathrm{P}(\{\omega\})$
Positivité, linéarité et monotonie de l'espérance.	La linéarité est admise, on pourra la justifier dans le cas où Ω est fini.
Théorème de transfert.	Admis : si g est définie sur K, l'espérance de $g(X)$ existe si et seulement si $\sum_{x\in K} g(x)\mathrm{P}(X = x)$ converge absolument, et dans ce cas $\mathrm{E}(g(X)) = \sum_{x\in K} g(x)\mathrm{P}(X = x)$.
Pour un entier $k \geqslant 1$, sous réserve d'existence, $\mathrm{E}(X^k)$ est appelé le moment d'ordre k de X.	
Inégalité de Markov.	Si X est à valeurs positives et admet une espérance, et si $a > 0$, alors $\mathrm{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathrm{E}(X)}{a}$.
Variance Si X admet une espérance, on pose, sous réserve d'existence, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))^2\big)$.	
L'existence de $\mathrm{V}(X)$ équivaut à celle de $\mathrm{E}(X^2)$, et on a $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	Puisque $\mathrm{V}(X) \geqslant 0$ on obtient l'inégalité $\mathrm{E}(X)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)$.
$\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Si $\mathrm{V}(X) = 0$, la variable X est constante en dehors d'un événement de probabilité nulle. Définition de l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.	
Espérance et variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable suivant une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.	
Inégalité de Bienaymé–Tchebychev.	Si X est une variable aléatoire admettant une variance et si $a > 0$, alors $\mathrm{P}(\lvert X - \mathrm{E}(X)\rvert \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}(X)}{a^2}$.
Covariance de deux variables aléatoires finies On se place dans le cas de variables aléatoires finies, c'est-à-dire dont l'ensemble des valeurs est fini. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y)\ \ = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. $\mathrm{Cov}(aX + b, Y) = a\mathrm{Cov}(X, Y)$. $\mathrm{V}(X + Y) = \mathrm{V}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{V}(Y)$. Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\lvert\mathrm{Cov}(X, Y)\rvert \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.	Le lien sera fait le moment venu avec le produit scalaire.

4) Indépendance

Indépendance de deux événements.	Les événements A et B sont indépendants lorsque $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$. Si $\mathrm{P}(B) \neq 0$, la condition revient à $\mathrm{P}(A \vert B) = \mathrm{P}(A)$.
Indépendance de n variables aléatoires discrètes.	Les variables $X_1, \ldots, X_n$, à valeurs dans $K_1, \ldots, K_n$ sont indépendantes lorsque, pour toutes parties $F_1, \ldots, F_n$ de $K_1, \ldots K_n$ respectivement, $\mathrm{P}\big((X_1 \in F_1) \cap \ldots \cap \mathrm{P}(X_n \in F_n)\ \ = \mathrm{P}(X_1 \in F_1) \ldots \mathrm{P}(X_n \in F_n)$.
Deux variables de Bernoulli B_1 et B_2 sont indépendantes si et seulement si les événements $(B_1 = 1)$ et $(B_2 = 1)$ sont indépendants.	
Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si, pour tous $x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n$, $\mathrm{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathrm{P}(X_1 = x_1) \ldots \mathrm{P}(X_n = x_n)$.	
Lemme des coalitions : si $X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_n$ sont des variables indépendantes, alors pour toute fonction f et g (définies sur un domaine adapté) $f(X_1, \ldots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.	Admis. On ne soulèvera aucune difficulté sur la notion de fonction de plusieurs variables.
Si les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et admettent une espérance, alors leur produit admet une espérance, et $\mathrm{E}(X_1 \ldots X_n) = \mathrm{E}(X_1) \ldots \mathrm{E}(X_n)$ et, si de plus elles admettent une variance, leur somme admet une variance et $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{V}(X_1) + \cdots + \mathrm{V}(X_n)$.	Démonstration dans le cas fini. En particulier, si deux variables finies sont indépendantes, leur covariance est nulle. Mais la covariance peut être nulle sans que les variables soient indépendantes.
On dit qu'une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires est une suite de variables aléatoires indépendantes lorsque pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.	

5) Processus de Bernoulli et lois classiques

Loi binomiale Définition, espérance et variance. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, la variable $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.	Notation $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.
La somme de deux variables binomiales indépendantes de paramètres k, p et ℓ, p est une variable binomiale de paramètres $k + \ell, p$.	On justifiera ce résultat en interprétant cette somme comme une somme de $k + \ell$ variables de Bernoulli indépendantes.
Loi géométrique	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Définition, espérance et variance. Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p>0$, alors la variable aléatoire T donnant le premier des indices i tels que $X_i=1$ suit la loi géométrique de paramètre p.	Notation $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. On pourra donner à T une valeur arbitraire quelconque si de tels indices n'existent pas.
Propriété de perte de mémoire : pour tous j,k de $\mathbb{N}$, $\mathrm{P}(T>j+k \mid T>j)=\mathrm{P}(T>k)$.	On pourra remarquer que cette propriété caractérise les lois géométriques, mais la démonstration n'est pas exigible.
Loi de Poisson Définition, espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.
Si np_n tend vers λ quand n tend vers $+\infty$, convergence de la suite de lois binomiales de paramètres n et p_n vers la loi de Poisson de paramètre λ au sens que pour tout k, $\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$	Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares. On ne discutera pas le concept de convergence en loi.

Deuxième année

Algèbre et géométrie

Comme en première année, les scalaires sont réels, et le contexte est celui d'un espace vectoriel E de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
1) Somme directe, supplémentaire	
Somme de deux sous-espaces vectoriels.	$F+G=\{x+y,\ x\in F, y\in G\}$.
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels, caractérisation par l'intersection.	La concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $F\oplus G$.
Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.	Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F admet un supplémentaire dans E.
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	
Projecteur (ou projection) sur F de direction G. Tout endomorphisme p vérifiant $p^2=p$ est un projecteur.	$F=\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)$, $G=\mathrm{Ker}\,p$.
Symétrie par rapport à F de direction G. Tout endomorphisme s vérifiant $s^2=\mathrm{Id}_E$ est une symétrie.	$F=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$, $G=\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$.
Somme et somme directe de plusieurs sous-espaces.	Les conditions suivantes sont équivalentes : (1) $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont en somme directe (2) Pour tout $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de $F_1\times F_2\times\cdots\times F_n$, on a l'implication : $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = 0_E \Rightarrow \forall i\in\{1,...,n\},\ u_i=0_E$ (3) $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ sont en somme directe et $\sum\limits_{i=1}^{n-1} F_i$ est en somme directe avec F_n
Dimension d'une somme directe.	
2) Valeurs propres des endomorphismes	
On rappellera la représentation d'un endomorphisme dans une base par une matrice carrée et la formule de changement de base $A'=P^{-1}AP$.	
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.	
Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre.	En d'autres termes, les espaces propres sont en somme directe.
Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.	
Endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable.	Une matrice A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Un endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle il est représenté par une matrice diagonale, ou encore si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres, ou encore si et seulement si la somme directe des espaces propres est égale à E, ou encore si et seulement si la somme des dimensions des espaces propres est égale à $\dim E$.
Si une matrice carrée d'ordre n admet n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable. Diagonalisation pratique des matrices carrées d'ordre 2.	Le théorème spectral est hors programme.
3) Produit scalaire	
Seul le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ sera étudié, aucun développement sur les espaces euclidiens plus généraux n'est au programme.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Définition du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et de la norme $\\|x\\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.	
Bilinéarité et symétrie du produit scalaire.	Conséquence $\\|x+y\\|^2 = \\|x\\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \\|y\\|^2$.
Orthogonalité de deux vecteurs, théorème de Pythagore.	L'égalité $\\|x+y\\|^2 = \\|x\\|^2 + \\|y\\|^2$ a lieu si et seulement si x et y sont orthogonaux.
Famille orthogonale, orthonormée, base orthonormée d'un sous-espace.	
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.	
Toute famille orthonormée d'un sous-espace se complète en une base orthonormée de ce sous-espace.	Ce résultat pourra être admis. Le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt n'est pas un attendu du programme. Néanmoins, les étudiants doivent être capables, sur des exemples simples ou avec indications, d'obtenir une base orthonormée d'un sous-espace.
Composantes d'un vecteur dans une base orthonormée.	$x = \sum_i \langle x, e_i\rangle e_i$, $\\|x\\| = \sum_i \langle x, e_i\rangle^2$.
Si X et Y sont les colonnes représentant x et y dans une base orthonormée, $\langle x, y\rangle = {}^tXY$.	Dans la situation où f est un endomorphisme de matrice A dans une base orthonormée, on remarquera l'intérêt de l'égalité ${}^t(AX)Y = {}^tX({}^tAY)$.
Inégalité de Cauchy–Schwarz.	
Inégalité triangulaire.	
Distance $\\|x-y\\|$.	
Orthogonal d'une partie, d'un sous-espace vectoriel.	
L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en est un supplémentaire.	
Pour tout sous-espace vectoriel F, on a $F^{\perp\perp} = F$.	Une base de l'orthogonal donne un système d'équations du sous-espace.
Hyperplans.	L'orthogonal d'un vecteur non nul est un hyperplan. Deux vecteurs orthogonaux à un même hyperplan sont colinéaires.
Projecteur orthogonal p_F sur un sous-espace F (c'est le projecteur sur F de direction $F^\perp$).	Expression de $p_F(x)$ lorsque F est muni d'une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_p)$.
Le projeté $p_F(x)$ de x sur F est le point de F le plus proche de x. La distance au sous-espace F est $\\|x - p_F(x)\\|$.	

Étude locale des fonctions d'une variable réelle

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
1) Fonctions polynomiales	
Les polynômes sont à coefficients réels et sont vus comme des fonctions d'une variable réelle.	
Définition d'un polynôme, unicité des coefficients, degré d'un polynôme, coefficient dominant, polynôme unitaire.	Les polynômes sont à coefficients réels et sont vus comme des fonctions d'une variable réelle. Leur ensemble est noté $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{R}[x]$.
Degré d'un produit, d'une somme.	On convient que $\deg(0) = -\infty$. Notation $\mathbb{R}_n[x]$ (on remarquera que c'est un espace vectoriel de dimension $n+1$).
Limites en $\pm\infty$.	
Racines (réelles), tout polynôme de degré impair admet une racine réelle.	
Factorisation d'un polynôme par $(x - x_0)$ si x_0 est une racine.	La division euclidienne n'étant pas au programme, on pourra prouver l'existence d'une telle factorisation en écrivant que $f(x) = f(x) - f(x_0)$ et utilisant l'identité remarquable $x^k - x_0^k = (x - x_0)\sum_{i=0}^{k-1} x_0^i x^{k-1-i}$.
Si un polynôme de degré $\leqslant n$ admet $n+1$ racines distinctes, il est nul.	
Multiplicité d'une racine : la racine x_0 est de multiplicité k si $f(x) = (x-x_0)^k g(x)$, avec $g(x_0) \neq 0$.	Si x_0 est une racine de f de multiplicité $k \geqslant 2$, alors c'est une racine de f' de multiplicité $k-1$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Un polynôme change de signe en une racine si et seulement si sa multiplicité est impaire.	
Un polynôme f admet un extremum local en x_0 si et seulement si x_0 est une racine de f' de multiplicité impaire.	Les étudiants doivent connaître le cas où $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$.

2) Développements limités

On se limitera autant que possible à l'ordre 2 ou 3 en 0 et on ne cherchera aucune technicité.

Définition d'un développement limité à l'ordre n en un point a.	Un développement limité de f en un point a, c'est un développement limité de $h \mapsto f(a+h)$ en 0.
Unicité du développement limité.	
Formule de Taylor–Young à l'ordre n pour une fonction n fois dérivable.	Résultat admis.
Obtention avec cette formule des développements limités en 0 de e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, composition, quotient.	Les étudiants doivent savoir faire ces calculs sur des exemples simples, mais aucun résultat général n'est exigible. Pour obtenir le développement limité d'un quotient, on effectuera la composition du développement du dénominateur par celui de $1/(1+u)$.
Primitivation d'un développement limité.	Ce résultat, admis, sera justifié avec la formule de Taylor–Young uniquement dans le cas d'une fonction n fois dérivable.
Application aux développements limités de $\ln(1+x)$ et de $\tan x$ (à l'ordre 3).	
Exemples simples de calcul de limite ou de recherche d'équivalent à l'aide de développements limités.	
Allure locale du graphe d'une fonction admettant un développement limité du type $f(x) = a_0 + a_1 x + a_k x^k + o(x^k)$, où $k \geqslant 2$ et $a_k \neq 0$.	La forme du graphe en un point dépend principalement du premier terme non linéaire du développement limité. Exemples avec $k = 2$ ou $k = 3$.
Détermination de l'asymptote oblique d'une fonction en l'infini. Position par rapport à l'asymptote.	
Étude de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$.	La forme du graphe doit être connue.

3) Intégrales généralisées

On se place pour commencer dans le cadre d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b[$ avec b éventuellement infini, puis ce cadre est rapidement élargi.

Définition d'une intégrale généralisée, ou intégrale impropre, en b, pour une fonction f continue sur $[a, b[$: on dit que l'intégrale est convergente en b si et seulement si $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b^-. Sinon, on dit que l'intégrale diverge en b.	Exemple $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$.
Lorsque la fonction intégrée est prolongeable par continuité en b, on dit que l'intégrale est faussement impropre en ce point.	
Extension des propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, conservation des inégalités, relation de Chasles.	On pourra admettre ces résultats.
Conditions de convergence des intégrales de Riemann $\int_0^c \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ et $\int_c^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.	
Critères de convergence pour deux fonctions positives f et g dont l'intégrale est impropre en un point :	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
– si $0 \leqslant f \leqslant g$, alors la convergence de l'intégrale de g implique celle de l'intégrale de f ; – si f et g sont équivalentes, alors leurs intégrales sont de même nature ; – si $f = o(g)$, alors la convergence de l'intégrale de g implique celle de l'intégrale de f.	
Utilisation de ces critères pour comparer à une intégrale de Riemann $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ en 0 ou en $+\infty$.	
Définition d'une intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence.	Admis.
Rapide extension par découpage, sans formalisation, à la convergence ou convergence absolue d'une intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ lorsque f est continue sur $]a,b[$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.	L'expression « fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ », qui vient de la théorie de la mesure, est prohibée.
$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.	Valeur admise, on pourra toutefois démontrer la convergence par comparaison.

Fonctions de deux variables réelles

Le niveau de formalisme de cette partie sera minimal. On ne cherchera pas à préciser les hypothèses générales des résultats. Aucune notion précise sur la classe de régularité d'une fonction de deux variables n'est exigible. Les fonctions seront définies sur le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
1) Exemples	
Graphe, lignes de niveau. Étude d'exemples, notamment les suivants (allure du graphe et des lignes de niveau) : Fonctions coordonnées $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$.	
Fonctions linéaires $(x,y) \mapsto ax+by$.	Le vecteur (a,b) est orthogonal aux droites de niveau.
2) Dérivées partielles	
Dérivées partielles.	Notations $\partial_1 f, \partial_2 f$. On pourra aussi utiliser les notations $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.
Définition d'un extremum local.	Le point (x_0, y_0) est un minimum local s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$ pour tout point (x,y) à distance inférieure ou égale à δ de (x_0,y_0).
Définition d'un point critique ($\partial_1 f(x,y) = 0 = \partial_2 f(x,y)$). Tout extremum local est un point critique.	Démonstration à l'aide des fonctions $t \mapsto f(t,y)$ et $t \mapsto f(x,t)$.
3) Fonctions quadratiques	
C'est une fonction du type $f : (x,y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$. La fonction quadratique f a un extremum local (strict) en $(0,0)$ si et seulement si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est (strictement) négatif. Détermination (dans les cas $\Delta < 0$) du type d'extremum en fonction du signe de a et c.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
4) Étude des points critiques	
Dérivées partielles d'ordre 2.	Notations $\partial^2_{1,1} f, \partial^2_{1,2} f, \partial^2_{2,1} f, \partial^2_{2,2} f$. On pourra aussi écrire $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, etc.
Théorème de Schwarz : sous des hypothèses de régularité non dites (et qu'on supposera acquises), on a l'égalité $\partial^2_{2,1} f = \partial^2_{1,2} f$.	Admis.
Si (x_0, y_0) est un point critique de f et si le discriminant de la fonction quadratique définie par $q(x,y) = \partial^2_{1,1} f(x_0,y_0)x^2 + 2\partial^2_{1,2} f(x_0,y_0)xy + \partial^2_{2,2} f(x_0,y_0)y^2$ est strictement négatif, alors la fonction f a un extremum local en (x_0, y_0), qui est de même nature que celui de la fonction q en $(0,0)$.	Admis.

Probabilités

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
1) Variables aléatoires à densité	
Soit f une fonction positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire de densité f lorsque, pour tout intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, l'ensemble $(X \in]a,b[)$ est un événement et $\mathrm{P}(X \in]a,b[) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.	On se limitera au cas de densités f continues (sauf éventuellement en un nombre fini de points). On remarquera que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{P}(\Omega) = 1$.
Si X est une variable à densité, alors $\mathrm{P}(X = x) = 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.	Un événement de probabilité nulle n'est pas forcément impossible.
Fonction de répartition : $F_X(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.	La fonction de répartition caractérise la densité (si la densité est continue). Exemples de calcul de fonctions de répartition et de densités de variables images $g(X)$ avec g monotone.
Espérance : on dit que X admet une espérance lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ converge absolument, et dans ce cas, $\mathrm{E}(X)$ est égale à cette intégrale.	
Positivité, linéarité, monotonie de l'espérance.	La linéarité est admise.
Théorème de transfert.	Admis : si X est une variable aléatoire ayant une densité f et si g est une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument, et dans ce cas, $\mathrm{E}(g(X))$ est égale à cette intégrale.
Variance : si X admet une espérance, on pose, sous réserve d'existence, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))^2\big)$. L'existence de $\mathrm{V}(X)$ équivaut à celle de $\mathrm{E}(X^2)$, et on a $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	Puisque $\mathrm{V}(X) \geqslant 0$, on obtient l'inégalité $\mathrm{E}(X)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)$.
$\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$. Si $\mathrm{V}(X) = 0$, la variable X est constante en dehors d'un événement de probabilité nulle. Définition de l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.	
La variable $X^* = \dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.	Elle a pour densité $f^*(x) = \sigma(X) f\big(\mathrm{E}(X) + \sigma(X)x$
Inégalité de Markov.	Si X est à valeurs positives et admet une espérance, et si $a > 0$, alors $\mathrm{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathrm{E}(X)}{a}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Inégalité de Bienaymé–Tchebychev.	Si X est une variable aléatoire admettant une variance et si $a > 0$, alors $\mathrm{P}(\lvert X - \mathrm{E}(X)\rvert \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}(X)}{a^2}$.

2) Loi uniforme, loi exponentielle, loi normale

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Loi uniforme sur un segment Densité $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ sur $[a,b]$, $f(x) = 0$ ailleurs. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$.
Loi exponentielle Densité $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ sur $\mathbb{R}_+$, $f(x) = 0$ ailleurs. Espérance, variance. Pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{P}(X > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$.	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$
Propriété de perte de mémoire : pour tous s et t de $\mathbb{R}_+$, $\mathrm{P}(X > t+s \mid X > t) = \mathrm{P}(X > s)$.	Cette propriété caractérise les lois exponentielles (démonstration non exigible). Les lois exponentielles s'interprètent comme les lois de durée de vie sans vieillissement. Ce sont des variantes continues des lois géométriques.
Loi normale Densité $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$. Espérance, variance. Cas particulier de la loi normale centrée réduite. Si X suit la loi normale $\mathscr{N}(0,1)$, la variable $Y = \sigma X + m$ suit la loi normale $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$.	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{N}(m,\sigma^2)$.

3) Indépendance de variables à densité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Les variables aléatoires à densité $X_1,\dots,X_n$ sont dites indépendantes lorsque, pour tous intervalles $I_1,\dots,I_n$, $\mathrm{P}\big((X_1 \in I_1)\cap\dots\cap(X_n \in I_n)\big) = \mathrm{P}(X_1 \in I_1)\dots\mathrm{P}(X_n \in I_n)$.	
Si les variables $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes et admettent une espérance, alors $\mathrm{E}(X_1 \dots X_n) = \mathrm{E}(X_1)\dots\mathrm{E}(X_n)$ et, si elles admettent une variance, $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{V}(X_1) + \cdots + \mathrm{V}(X_n)$.	Propriété admise. La loi d'une somme de variables aléatoires est hors programme.
On dit qu'une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires est une suite de variables aléatoires indépendantes lorsque pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes.	

4) Loi des grands nombres et application à la statistique

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Loi faible des grands nombres : Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi d'espérance m, et soit pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{P}\left(\lvert\overline{X}_n - m\rvert \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.	Démonstration, dans le cas où la loi commune admet une variance, par l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev.
Intervalle de confiance : Si la loi commune admet une variance v, alors, pour tout $a \in]0,1]$, la probabilité que m appartienne à l'intervalle $\left[\overline{X}_n - \sqrt{\frac{v}{na}}, \overline{X}_n + \sqrt{\frac{v}{na}}\right]$ est supérieure ou égale à $1-a$.	On discutera la notion d'intervalle de confiance au niveau $1-a$. On démontrera l'énoncé ci-contre à l'aide de l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev. En pratique, la variance v est souvent inconnue, mais on peut parfois la majorer. Par exemple, dans le cas d'une variable aléatoire bornée $a \leqslant X \leqslant b$, on a $\mathrm{V}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.