

CHAPITRE

4

OPTION B/L

## SUJET 4.1

On dit que deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  sont *semblables* lorsqu'il existe une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A = P^{-1}BP$ .

1. (a) Montrer que si deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  sont semblables, alors  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ .  
(b) Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Trouver une constante réelle  $\lambda$  telle que

$$A^2 = \text{Tr}(A)A + \lambda \det(A)I_2.$$

2. Soit  $A$  une matrice non nulle de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
On suppose qu'il existe une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $AM - MA = A$ .
  - (a) Calculer  $\text{Tr}(A)$ .
  - (b) La matrice  $A$  est-elle inversible ?
  - (c) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

3. Montrer que toute matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est semblable à sa transposée.

**Indication :** si  $A$  n'est pas un multiple de la matrice identité, on pourra montrer l'existence d'un vecteur  $x \in \mathbb{R}^2$  tel que la famille  $(x, u(x))$  soit une base de  $\mathbb{R}^2$ .

SOLUTION DU SUJET 4.1

1. Le programme officiel de BL contient seulement la mention suivante "trace d'une matrice, trace d'un produit". On peut donc supposer connue l'égalité  $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$ .

(a) Si les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables, il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $A = P^{-1}BP$ . On a alors :  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(P^{-1}BP) = \text{Tr}(PP^{-1}B) = \text{Tr}(B)$ .

(b) En notant  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  on a :

$$\text{Tr}(A)A - \det(A)\text{I}_2 = \begin{pmatrix} (a+d)a - (ad-bc) & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d - (ad-bc) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = A^2$$

Le réel  $\lambda$  cherché est  $\lambda = -1$ .

2. (a) Par linéarité de la trace,  $\text{Tr}(AM) - \text{Tr}(MA) = \text{Tr}(A)$ . Or,  $\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(MA)$ , donc  $\text{Tr}(A) = 0$ .

(b) Si la matrice  $A$  était inversible, alors on aurait :  $AMA^{-1} - MAA^{-1} = AA^{-1}$  i.e.  $AMA^{-1} - M = \text{I}_2$ . Par linéarité de  $\text{Tr}$ , on aurait alors  $\text{Tr}(AMA^{-1}) - \text{Tr}(M) = \text{Tr}(\text{I}_2)$ . Or,  $\text{Tr}(AMA^{-1}) = \text{Tr}(M)$ , on aurait donc  $\text{Tr}(\text{I}_2) = 0$ , d'où une contradiction. Ainsi,  $A$  n'est pas inversible.

(c) On pourra suggérer au candidat de calculer  $A^2$ .

- On a vu que  $\text{Tr}(A) = 0$ . En outre, la matrice  $A$  n'est pas inversible, donc  $\det(A) = 0$ . En reportant dans l'égalité de la question 1, il vient alors  $A^2 = 0_2$ .

- La seule valeur propre possible de  $A$  est alors 0 (et elle l'est effectivement puisque  $A$  n'est pas inversible). Si la matrice  $A$  était diagonalisable, il existerait une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A = PDP^{-1}$ , où  $D = 0_2$ . Par suite, on aurait  $A = 0_2$ , ce qui est absurde.

Ainsi,  $A$  n'est pas diagonalisable.

3. • Si la matrice  $A$  est scalaire, alors elle est égale à sa transposée et donc elle lui est semblable.

- Supposons  $A$  non scalaire. On montre qu'il existe un vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que la famille  $(x, u(x))$  soit une base de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que, pour tout vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^2$ , la famille  $(x, u(x))$  est liée. Pour tout vecteur  $x$  non nul, il existe donc un réel  $\lambda_x$  tel que  $u(x) = \lambda_x x$ . Soit  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Il existe un réel  $\lambda_1$  tel que  $u(e_1) = \lambda_1 e_1$ , un réel  $\lambda_2$  tel que  $u(e_2) = \lambda_2 e_2$  et un réel  $\mu$  tel que  $u(e_1 + e_2) = \mu(e_1 + e_2)$ . On a alors :

$$\mu e_1 + \mu e_2 = \mu(e_1 + e_2) = u(e_1 + e_2) = u(e_1) + u(e_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

En identifiant, on obtient alors  $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$  et ainsi les endomorphismes  $u$  et  $\mu \text{id}_{\mathbb{R}^2}$  coïncident sur la base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , ils sont donc égaux. On en déduit que  $A = \mu \text{I}_2$ , ce qui est absurde. Il existe donc bien un vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que la famille  $\mathcal{B}' = (x, u(x))$  est libre, ce qui en fait une base de  $\mathbb{R}^2$ . En utilisant le résultat de la question 1,  $u(u(x)) = u^2(x) = \text{Tr}(A)u(x) - \det(A)x$ , donc la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \text{Tr}(A) \end{pmatrix}$ .

En procédant de même, on montre que  $A^T$  est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & -\det(A^T) \\ 1 & \text{Tr}(A^T) \end{pmatrix}$ , matrice dont on montre

qu'elle est égale à  $M$ . Finalement,  $A$  et  $A^T$  sont semblables à une même matrice, elles sont donc semblables.

## SUJET 4.2

1. Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $b \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  et  $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ .

Montrer qu'il existe une matrice  $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  inversible telle que  $A = Q\Delta Q^{-1}$ .

2. Soit  $p \in ]0, 1[$ . Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre  $p$ .

Pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on pose  $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ .

Calculer la probabilité de l'événement  $E = \{\omega \in \Omega ; M(\omega) \text{ est inversible}\}$ .

3. On note  $S(\omega)$  (resp.  $D(\omega)$ ) la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de  $M(\omega)$ .

- (a) Calculer la covariance des variables aléatoires  $S$  et  $D$ .  
(b) Les variables aléatoires  $S$  et  $D$  sont-elles indépendantes ?

SOLUTION DU SUJET 4.2

1. En résolvant les équations  $AX = (a + b)X$  et  $AX = (a - b)X$ , on montre que les deux valeurs propres (distinctes) de  $A$  sont  $a + b$  et  $a - b$ .

De plus, les sous-espaces propres associés sont  $E_{a+b} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $E_{a-b} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

En posant  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , on obtient  $A = Q\Delta Q^{-1}$

2. Comme  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ , la matrice  $M(\omega)$  est de la forme de la matrice  $A$  étudiée dans la question 1. Or,  $A$  est inversible si et seulement si  $0$  n'est pas valeur propre de  $A$ , donc si et seulement si  $a \neq b$ . Il suit que  $\mathbb{P}(E) = P(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y)$  avec

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)} p^2 = p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j = p^2 \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p}{1 + q} = \frac{p}{2 - p}$$

On conclut que  $\mathbb{P}(E) = \frac{2 - 2p}{2 - p}$ .

3. (a) Les valeurs propres de  $M(\omega)$  sont  $X(\omega) + Y(\omega)$  et  $X(\omega) - Y(\omega)$ . Comme  $Y(\omega) > 0$  (loi géométrique), la plus grande des valeurs propres est  $S(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$  et la plus petite des valeurs propres est  $D(\omega) = X(\omega) - Y(\omega)$ . Ainsi,

$$\text{cov}(S, D) = \text{cov}(X + Y, X - Y) = \text{cov}(X, X) + \text{cov}(X, -Y) + \text{cov}(Y, X) + \text{cov}(Y, -Y)$$

$$\text{cov}(S, D) = \text{cov}(X, X) - \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Y) - \text{cov}(Y, Y) = V(X) - V(Y) = \boxed{0}.$$

- (b) Par indépendance de  $X$  et de  $Y$ , on a

$$\mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) = P(X = 1)P(Y = 1) = p^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(D = 0) = \mathbb{P}(X = Y) = \frac{p}{2 - p}.$$

Or,

$$\mathbb{P}((S = 2) \cap (D = 0)) = P((X = 1) \cap (Y = 1)) = P(X = 1)P(Y = 1) = p^2$$

On peut montrer que  $\frac{p}{2 - p} \neq 1$ . Ainsi,  $\mathbb{P}([S = 2] \cap [D = 0]) \neq \mathbb{P}(S = 2) \cdot \mathbb{P}(D = 0)$ .

Les variables aléatoires  $S$  et  $D$  ne sont pas indépendantes, alors que leurs covariance est nulle.

## SUJET 4.3

1. On note  $F$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$\forall x \geq 0, \quad F(x) = (1 + \sqrt{x}) e^{-\sqrt{x}}.$$

Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et exprimer  $F'(x)$  en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}_+$ .

2. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $g$  est une densité de probabilité.

3. On note désormais  $X$  une variable aléatoire réelle admettant  $g$  comme densité. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  et donner sa valeur.

## SOLUTION DU SUJET 4.3

1. La fonction  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  avec

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} - (1 + \sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} = \boxed{-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{x}}}$$

**Le théorème de prolongement de la fonction dérivée ne figure pas au programme de BL :** les candidats ne peuvent donc pas l'utiliser. Il faut donc calculer la limite du taux d'accroissement de  $F$  en 0. Un développement limité au voisinage de 0 donne :

$$e^{-\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} + \frac{x}{2} + o(x)$$

On en déduit que, toujours lorsque  $x$  tend vers 0 :

$$\frac{(1 + \sqrt{x})e^{-\sqrt{x}} - 1}{x} = \frac{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + \frac{x}{2} + o(x)) - 1}{x} = \frac{-\frac{x}{2} + o(x)}{x} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

Ainsi,  $F$  est dérivable en 0, avec  $F'(0) = -\frac{1}{2}$ .

2. La fonction  $g$  est définie et positive sur  $\mathbb{R}$ .  
La fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en 0.  
Pour tout réel  $A > 0$ ,

$$I(A) = \int_0^A e^{-\sqrt{t}} dt = [-2F(t)]_0^A = 2F(0) - 2F(A) = 2 - 2(1 + \sqrt{A})e^{-\sqrt{A}} \quad \text{donc} \quad \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = 2$$

Il suit que  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$ . On en déduit que  $g$  est une densité de probabilité.

3. La variable  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  si et seulement si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^n g(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^n e^{-\sqrt{t}} dt$  converge.

Dans le programme de BL, les changements de variable ne concernent que les intégrales sur un segment.

Pour tout  $A > 0$ , on pose donc  $I(A) = \frac{1}{2} \int_0^A t^n e^{-\sqrt{t}} dt$ . Le changement de variable  $u = \sqrt{t}$  donne

$$I(A) = \int_0^{\sqrt{A}} u^{2n+1} e^{-u} du. \text{ La fonction Gamma ne figure pas au programme de BL.}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$ . On montre par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Gamma(n)$  converge et que  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . L'hérédité repose sur une intégration par parties.

On conclut que  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  et  $E(X^n) = \Gamma(2n+2) = (2n+1)!$

## SUJET 4.4

Soit  $(x, b, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$ .

Une urne contient  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule de la façon suivante : à chaque tirage, on remet dans l'urne la boule tirée puis on y ajoute  $x$  boules de la couleur de celle qui vient d'être piochée.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'on obtient une boule blanche au  $n^{\text{ième}}$  tirage et qui prend la valeur 0 si l'on obtient une boule rouge au  $n^{\text{ième}}$  tirage.

1. Déterminer la loi de  $X_1$  puis en déduire  $E(X_1)$ .

2. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

(a) Dire ce que représente la variable  $Y_n$ .

(b) Donner, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la probabilité  $P_{(Y_n=k)}(X_{n+1} = 1)$ .

(c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_{n+1} = 1) = \frac{b + xE(Y_n)}{b + r + nx}$$

3. Montrer que les variables  $X_n$  suivent toutes la même loi de BERNOULLI.

## SOLUTION DU SUJET 4.4

1.  $X_1$  suit la loi de BERNOULLI de paramètre  $\left(\frac{b}{b+r}\right)$  et  $E(X_1) = \frac{b}{b+r}$ .

2. (a)  $Y_n$  est le nombre de boules blanches obtenues lors des  $n$  premiers tirages.

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Si  $(Y_n = k)$  est réalisé, les  $n$  premiers tirages ont donné  $k$  boules blanches. Comme, à chaque tirage, on remet la boule tirée en ajoutant  $x$  boules de la même couleur, il y a  $kx$  boules blanches de plus dans l'urne et  $nx$  boules de plus en tout.

On a donc  $P_{(Y_n=k)}(X_{n+1} = 1) = \frac{b+kx}{b+r+nx}$ .

(c) On a  $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$ .

La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements  $(Y_n = k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^n P(Y_n = k) P_{(Y_n=k)}(X_{n+1} = 1)$$

On a donc

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^n \frac{b+kx}{b+r+nx} P(Y_n = k) = \frac{b+xE(Y_n)}{b+r+nx}.$$

3. On fait une récurrence forte, dont l'initialisation est déjà faite, puis on suppose que jusqu'à un certain rang  $n \in \mathbb{N}^*$ , toutes les variables  $X_k$  suivent la loi de BERNOULLI de paramètre  $\frac{b}{b+r}$ . Ceci permet d'obtenir

l'espérance de  $Y_n$  par linéarité de l'espérance, puisque  $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et on a alors :

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n \frac{b}{b+r} = n \times \frac{b}{b+r}$$

On remplace ensuite dans l'expression de  $P(X_{n+1} = 1)$  et on trouve :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{b}{b+r}$$

On conclut que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  suit la loi de BERNOULLI de paramètre  $\frac{b}{b+r}$ .

## SUJET 4.5

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ .

1. (a) Calculer  $I_1$  et  $I_2$ .  
(b) Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)$ .
2. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , établir une relation entre  $I_{n+2}$  et  $I_n$ .  
(b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{I_{n+1}}{I_n} \right)$ .
3. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$ . Comparer  $u_{n+1}$  et  $u_n$ .  
(b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n}I_n)$ .

## SOLUTION DU SUJET 4.5

On rappelle que la notion d'équivalent n'est pas au programme de B/L.

1. (a)  $I_1 = 1$ . En utilisant la formule  $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ , on trouve  $I_2 = \frac{\pi}{4}$ .
- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(\sin(t) - 1)dt \leq 0$ . La suite  $(I_n)$  est décroissante.
2. (a) Par intégration par parties,

$$I_{n+2} = [-\cos(t) \sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) \cos^2(t) dt.$$

On en déduit que  $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+1}$ , ce qui donne  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$ .

- (b) Par décroissance de la suite  $(I_n)$ ,  $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ .

Par la question 2(a),  $\frac{n+1}{n+2}I_n \leq I_{n+1} \leq I_n$ , ce qui donne  $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$  (on pourra demander

au candidat de justifier rapidement que  $I_n > 0$ .) Par théorème d'encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{I_{n+1}}{I_n} \right) = 1$ .

3. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+2)\frac{n+1}{n+2}I_nI_{n+1} = u_n$ . Donc la suite  $(u_n)$  est constante.
- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_0 = \frac{\pi}{2}$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{\pi}{2} = u_{n-1} = nI_nI_{n-1} = (\sqrt{n}I_n)^2 \frac{I_{n-1}}{I_n}.$$

En utilisant la question 2(b), on trouve  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nI_n^2) = \frac{\pi}{2}$ . Comme  $I_n > 0$ , on conclut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n}I_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$



## CHAPITRE

# 5

## EXEMPLES DE QUESTIONS COURTES

### QUESTION SANS PRÉPARATION 1

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , et tout  $x \in \mathbb{R}$  on pose  $P_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - i)$  et  $P_0(x) = 1$ .

1. Montrer que  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[x]$ .
2. Soit  $\lambda > 0$ . Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  
Calculer  $E(P_n(X))$  et en déduire que  $E(X^n) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda^n$ .

### SOLUTION DE LA QSP.

1.  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{degré}(P_k) = k$ . Ainsi  $(P_0, \dots, P_n)$  est une famille de  $n + 1$  polynômes de degrés échelonnés, donc c'est une base de  $\mathbb{R}_n[x]$ .

2. Par le th. de transfert,  $E(P_n(X))$  existe si et seulement si la série  $\sum_{k \geq 0} P_n(k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$  converge (absolument),

c'est à dire si et seulement si la série  $\sum_{k \geq n} \frac{k(k-1) \dots (k-n+1)}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}$  converge,

c'est à dire encore

si et seulement si la série  $\sum_{k \geq n} \frac{\lambda^k}{(k-n)!} e^{-\lambda}$  converge.

Or il y a convergence et la somme vaut  $\lambda^n$ .

De plus, en utilisant la base définie dans **Q1**, on a  $x^n = \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n} P_k(x)$  pour tout  $x$ , avec  $\alpha_{n,n} = 1$ .

Donc  $E(X^n) = \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n} \lambda^k$  par linéarité, qui est équivalente à  $\alpha_{n,n} \lambda^n = \lambda^n$ , quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**QUESTION SANS PRÉPARATION 2**

Soit un entier  $n \geq 2$ . On muni  $\mathbb{R}^n$  de la norme euclidienne canonique, notée  $\|\cdot\|$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . On suppose que l'application  $f$  n'est pas bijective et qu'on a :  $\mathbb{R}^n = \text{Im}(f) \oplus^\perp \text{Ker}(f)$ .

Soit l'application  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  par :  $\varphi(x) = \inf\{\|x - f(y)\| \mid y \in \mathbb{R}^n\}$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Montrer qu'il existe un unique couple  $(y, z) \in \text{Im}(f) \times \text{Ker}(f)$  tel que :

$$z = x - y \text{ et } \varphi(x) = \|z\|$$

2. Pour  $n$  pair, en déduire la valeur de :  $A = \inf \left\{ \sqrt{(a_n + a_1 + 1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + a_{i+1} - 1)^2} \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$ .

**SOLUTION DE LA QSP.**

1. On reconnaît que  $\varphi(x)$  est la distance  $x$  au sous-espace vectoriel  $\text{Im}(f)$ .

D'après le théorème de projection sur un SEV, on sait donc que  $\varphi(x) = d(x, \text{Im}(f)) = \|x - u\|$ , en notant  $y$  le projeté orthogonal du vecteur  $x$  sur  $\text{Im}(f)$ .

Du fait de l'orthogonalité de  $\text{Im}(f)$  et de  $\text{Ker}(f)$ , on a alors :  $z = x - y \in \text{Ker}(f)$ .

2. On considère le vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x = (1, 1, \dots, 1, -1)$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  défini par :

$$f(y_1, \dots, y_n) = (y_1 + y_2, y_2 + y_3, \dots, y_{n-1} + y_n, y_n + y_1)$$

On établit facilement que  $\text{Ker}(f)$  est engendré par le vecteur  $v_0 = (1, -1, \dots, 1, -1)$ .

Si  $v = (y_1 + y_2, y_2 + y_3, \dots, y_{n-1} + y_n, y_n + y_1) \in \text{Im}(f)$ , on constate que  $v \perp v_0$ . Donc  $\text{Im}(f) \perp \text{Ker}(f)$ .

Donc la question 1 s'applique, et donne  $A = \|z\|$  où  $z$  est le projeté orthonormal de  $x$  sur  $\text{Ker} f$ .

Le vecteur  $v_1 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$  est une base orthonormée de  $\text{Ker}(f)$ ,

donc la formule de la projection orthogonale dans une base orthonormée donne :  $z = (x|v_1)v_1$ .

Ainsi :  $A = (x|v_1) = \sqrt{\frac{4}{n}}$ .

**QUESTION SANS PRÉPARATION 3**

Soit un entier  $n \geq 2$  et  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ .

On que  $u$  et  $v$  sont codiagonalisables s'il existe une base de  $E$  dont les vecteurs sont à la fois vecteurs propres de  $u$  et de  $v$ .

1. Supposons que  $u$  admet  $n$  valeurs propres distinctes.  
Montrer que  $u$  et  $v$  commutent si et seulement si ils sont codiagonalisables.
2. Supposons maintenant que  $u$  est diagonalisable.  
A-t-on encore la propriété :  $u$  et  $v$  commutent si et seulement s'ils sont codiagonalisables ?

**SOLUTION DE LA QSP.**

1. Si  $u$  et  $v$  sont codiagonalisables. Il existe  $(e_i)_{i=1, \dots, n}$  une base de vecteurs propres commune à  $u$  et  $v$  telle que  $u(e_i) = \lambda_i e_i$  et  $v(e_i) = \mu_i e_i$  avec  $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ . On a  $u \circ v(e_i) = \lambda_i \mu_i e_i = v \circ u(e_i)$ .  
Les endomorphismes  $u \circ v$  et  $v \circ u$  coïncident sur une base, ils sont donc égaux *i.e.*  $u$  et  $v$  commutent.  
Montrons la réciproque. L'endomorphisme  $u$  possède  $n = \dim E$  valeurs propres distinctes, donc il est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1.  
Notons  $E_i$  le sev propre associé à  $\lambda_i$ .  
Il existe donc une base de vecteurs propres de  $u$  :  $(e_i)_{i=1, \dots, n}$  telle que  $E_i = \text{Vect}(e_i)$  et  $u(e_i) = \lambda_i e_i$ .  
Comme,  $u$  et  $v$  commutent, il vient :  $u \circ v(e_i) = v \circ u(e_i) = \lambda_i v(e_i)$  et donc  $v(e_i) \in E_i = \text{Vect}(e_i)$ .  
Il existe alors  $\mu_i \in \mathbb{R}$  tel que  $v(e_i) = \mu_i e_i$ .  
Ainsi  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de vecteurs propres commune à  $u$  et  $v$  et donc ils sont codiagonalisables.
2. Si  $u$  et  $v$  sont codiagonalisables, ils commutent d'après la preuve de la question 1).  
La réciproque n'est pas toujours vraie en prenant  $u = \text{Id}$  et  $v$  non diagonalisable (cela existe si  $n \geq 2$  ; on pourra demander pourquoi au candidat).