

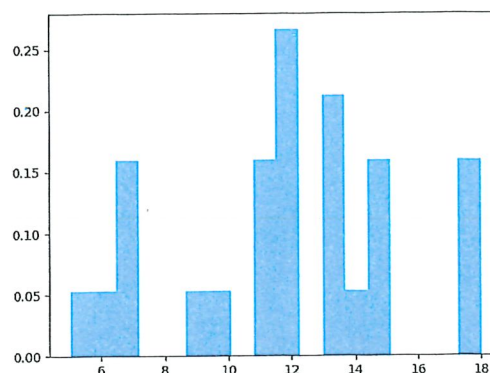
ÉPREUVE ORALE MATHÉMATIQUES B/L

HEC Paris 2025

Programme Grande Ecole

Le bilan de la session 2025 de mathématiques voie BL est satisfaisant.
Les notes se sont étalées entre 5 et 18. La moyenne s'établit à 11,88 et l'écart type à 3,57.

count	37.000000
mean	11.702703
std	4.174092
min	4.000000
25%	9.000000
50%	12.000000
75%	15.000000
max	19.000000



Le jury a fortement apprécié les qualités d'expression ainsi que la finesse de raisonnement de certains candidats qui ont fait forte impression.

A contrario, certains candidats se sont révélés approximatifs, au niveau du calcul, mais surtout au niveau de la connaissance des théorèmes du cours.

Le jury aimerait insister sur les points suivants :

- La question de cours n'est pas à négliger. Le jury attend une réponse précise et rigoureuse. De manière plus générale, plusieurs candidats au cours de l'exercice ont pu trébucher sur des définitions très standards et d'un usage constant.
- Il faut éviter de donner l'impression d'utiliser des « recettes de cuisine » sans aucun recul. Ainsi, plusieurs candidats, dans l'étude des points critiques d'une fonction de deux variables, ont utilisé le caractère négatif du discriminant de la fonction quadratique associée à la fonction au point d'étude, mais ce critère se limitait dans leur présentation orale à une inégalité algébrique « presse-bouton » faisant intervenir les dérivées partielles et les candidats se révélaient incapables de dire que cette égalité concernait le discriminant d'une fonction quadratique et de préciser cette fonction quadratique quand le jury les interrogeait.
- Avant de dériver la fonction de répartition d'une variable à densité, il faut avoir pris le temps de vérifier que la fonction de répartition en question est bien celle d'une variable à densité : plusieurs candidats ont ainsi dérivé des fonctions de répartition sans prendre le temps de vérifier qu'ils pouvaient effectivement le faire.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons les candidats pour leur combattivité, qui s'est particulièrement exprimée lors des questions sans préparation, où certains ont pu redresser une situation bien compromise.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, qu'ils ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET BL 1

Exercice principal BL 1

Dans cet exercice de probabilités, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle X sont, sous réserve d'existence, notées respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

1. Question de cours : Etant données n variables aléatoires indépendantes X_k , où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p , quelle est la loi de $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$?

2. On considère maintenant un groupe (*cluster*) de N ordinateurs fonctionnant jour et nuit. Chaque jour, chaque machine encore en fonctionnement a une probabilité p de tomber en panne. Une fois qu'une machine est tombée en panne, on la retire du groupe. Les fonctionnements des machines sont indépendants les uns des autres.

On appelle, pour j un entier naturel, X_j le nombre de machines tombées en panne le jour j et S_j le nombre de machines sorties du groupe à l'issue du jour j , de sorte que $S_0 = 0$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $S_j = S_{j-1} + X_j$. Le nombre de machines restant dans le groupe à l'issue du jour j est $N - S_j$.

- (a) Déterminer la loi de S_1 . En donner espérance et variance.
 - (b) Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $\{S_1 = n\}$? Déterminer alors la loi de S_2 .
3. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, S_j suit une loi binomiale de paramètres N et p_j où l'on déterminera p_j en fonction de j
 4. On note T le nombre de jours écoulés avant qu'il n'y ait plus une machine fonctionnelle dans le groupe.
 - (a) Justifier que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(S_k < N)$. Quelle est la loi de T ?
 - (b) On suppose $N = 2$. Quelle est l'espérance de T ?
 - (c) On considère N variables aléatoires géométriques indépendantes R_n de paramètre p . Justifier que T a même loi que $R = \max(R_1, \dots, R_N)$.

Solution :

1. Question de cours : Première Année, IV.5. Il s'agit de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2. On considère maintenant un groupe (*cluster*) de N ordinateurs fonctionnant jour et nuit. Chaque jour, chaque machine encore en fonctionnement à une probabilité de tomber en panne de p . Une fois qu'une machine est tombée en panne, on la retire du groupe. Les fonctionnements des machines sont indépendants les uns des autres.

- (a) La v.a. S_1 suit une loi binomiale de paramètres N et $p_1 = p$. On a $\mathbb{E}(S_1) = N.p$ et $\mathbb{V}(S_1) = N.p(1 - p)$
- (b) La v.a. S_2 est à valeurs dans $\llbracket 0, N \rrbracket$. La loi conditionnelle de X_2 sachant $S_1 = n$ est une loi binomiale de paramètres $N - n$ (ce qui reste de machines) et p (modèle de comptage d'événements indépendants de même probabilité). On a donc, pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_2 = k) &= \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(X_2 = k - n | S_1 = n) \cdot \mathbb{P}(S_1 = n) \\
&= \sum_{n=0}^N \binom{N-n}{k-n} p^{k-n} \cdot (1-p)^{N-n-(k-n)} \cdot \binom{N}{n} p_1^n (1-p_1)^{N-n} \\
&= \sum_{n=0}^k \frac{(N-n)!}{(k-n)!(N-k)!} p^{k-n} \cdot (1-p)^{N-k} \cdot \frac{N!}{n!(N-n)!} p_1^n (1-p_1)^{N-n} \\
&= \binom{N}{k} (1-p)^{N-k} (1-p_1)^{N-k} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \cdot p^{k-n} \cdot p_1^n (1-p_1)^{k-n} \\
&= \binom{N}{k} ((1-p)(1-p_1))^{N-k} (p_1 + p(1-p_1))^k
\end{aligned}$$

Donc S_2 suit une loi binomiale de paramètres N et p_2 vérifiant $p_2 = p_1 + p(1-p_1)$, c'est à dire $p_2 = p + p_1(1-p)$

3. Le même calcul que celui permettant le passage de $j = 1$ à $j = 2$ montre qu'en supposant que S_j suit une loi binomiale de paramètres N et p_j alors S_{j+1} suit une loi binomiale de paramètres N et $p_{j+1} = p + p_j(1-p)$. Les paramètres p_j satisfont une récurrence arithmético-géométrique que l'on peut résoudre (le point fixe α de la récurrence est 1, la raison géométrique est $1-p$) et donc

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, p_j = (1-p)^{j-1}(p-1) + 1 = 1 - (1-p)^j$$

On a donc $\mathbb{E}(S_j) = N \cdot p_j = N \cdot (1 - (1-p)^j)$, $\mathbb{V}(S_j) = N \cdot p_j(1-p_j) = N \cdot (1 - (1-p)^j)(1-p)^j$.

4. On note T le nombre de semaines écoulées avant qu'il n'y ait plus une machine fonctionnelle dans le groupe

(a) On a $T = \min(j \in \mathbb{N}^*, S_j = N)$. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(S_k < N) = 1 - \mathbb{P}(S_k = N) = 1 - p_k^N = 1 - (1 - (1-p)^k)^N$$

et donc, pour $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T = j) = \mathbb{P}(T > j-1) - \mathbb{P}(T > j) = (1 - (1-p)^{j-1})^N - (1 - (1-p)^j)^N$$

(b) Pour ce cas particulier $N = 2$,

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T = j) = (1 - q^j)^2 - (1 - q^{j-1})^2 = 2(1-q)q^{j-1} - (1 - q^2)q^{2(j-1)}$$

et donc (en utilisant les valeurs des premières séries géométriques dérivées, comme présenté dans le cours)

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \cdot \mathbb{P}(T = j) = 2 \cdot \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q^2}.$$

(c) On a pour $j \in \mathbb{N}$, $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(R_n > j) = q^j$$

et donc (calcul classique de loi du max de v.a. indépendantes)

$$\mathbb{P}(R > j) = 1 - \mathbb{P}(R \leq j) = 1 - \mathbb{P}(R_1 \leq j \cap \dots \cap R_N \leq j) = 1 - (1 - \mathbb{P}(R_1 > j))^N = 1 - (1 - q^j)^N.$$

Ceci montre que T a même loi que R .

Ceci s'explique de la façon suivante : Pour chacune des N machines, on note R_n l'instant de la panne. C'est une variable géométrique de paramètre p . Les machines sont indépendantes d'où l'indépendance mutuelle des variables aléatoires R_n . L'instant T marque l'instant où toutes les machines tombent en panne, c'est donc que $T = \max(R_1, \dots, R_N)$.

Exercice sans préparation BL 1

Déterminer le/les points critiques et les extrema éventuels de la fonction f définie par

$$\forall x, y > 0, f(x, y) = x - \ln(x) + y - \ln(y)$$

Déterminer l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y) \in]0, +\infty[^2, f(x, y) = 2 \right\}.$$

Solution :

Pour déterminer le/les points critiques de la fonction f définie par

$$\forall x, y > 0, f(x, y) = x - \ln(x) + y - \ln(y)$$

On calcule les deux dérivées partielles de $f : \forall x, y > 0$,

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= \frac{x-1}{x} \\ \partial_2 f(x, y) &= \frac{y-1}{y} \end{aligned}$$

et

$$(x, y) \text{ critique pour } f \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \text{ et } \frac{y-1}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = 1$$

La forme quadratique en $(x, y) = (1, 1)$ est donnée par $q(x, y) = x^2 + y^2$. Son discriminant vaut $\Delta = -1 < 0$ donc f admet un extremum local en $(1, 1)$. De plus cet extremum est de même nature que celui de q en $(0, 0)$. Or q a un minimum en $(0, 0)$ donc f admet un minimum local en $(1, 1)$. Ce minimum vaut $f(1, 1) = 2$.

Étudions la fonction $g : t \mapsto t - \ln(t)$. Sa dérivée est donnée par

$$\forall t > 0, g'(t) = \frac{t-1}{t}$$

ce qui montre que g est strictement décroissante sur $]0, 1]$, strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et donc que

$$\forall t > 0, t \neq 1 \Rightarrow g(t) > 1 = g(1)$$

et donc par contraposée que :

$$\forall t > 0, g(t) = g(1) = 1 \Rightarrow t = 1.$$

Soit (x, y) dans l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y) \in]0, +\infty[^2, f(x, y) = 2 \right\}.$$

On a

$$0 = f(x, y) - 2 = \underbrace{g(x) - g(1)}_{\geq 0} + \underbrace{g(y) - g(1)}_{\geq 0}$$

et donc

$$g(x) - g(1) = 0 \text{ et } g(y) - g(1) = 0$$

C'est à dire

$$x = 1 = y$$

Comme $(1, 1) \in \mathcal{C}$, on a donc

$$\mathcal{C} = \{(1, 1)\}.$$

Question supplémentaire : Dessiner :

$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2, f(x, y) = 3\}$$

A voir comme étant (et donc, c'est une boucle fermée autour de $(1, 1)$.)

$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2, g(y) = 3 - g(x)\} = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2, y = g_+^{-1}(3 - g(x)) \text{ ou } y = g_-^{-1}(3 - g(x))\}$$

où g_-^{-1} est la réciproque de $g :]0, 1] \rightarrow [1, +\infty[$, g_+^{-1} est la réciproque de $g : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ et x est tel que $g(x) \leq 2$, c'est à dire $x \in [g_-^{-1}(2), g_+^{-1}(2)]$.

SUJET BL 2

Exercice principal BL 2

Dans cet exercice de probabilités, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. L'espérance d'une variable aléatoire réelle X est, sous réserve d'existence, notée $\mathbb{E}(X)$.

1. Question de cours : Donner la fonction de répartition d'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$)

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} \cdot e^{-e^{-x}} = \exp(-x) \cdot \exp(-\exp(-x)).$$

- (a) Montrer que f est une densité de probabilité sur \mathbb{R} .
 - (b) Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité de probabilité. Donner une expression de F_X , la fonction de répartition de X .
3. Soit une suite de variables aléatoires $T_k, k \in \mathbb{N}^*$ indépendantes, suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $S_n = \max_{k \in [1, n]} T_k$.

- (a) Donner la fonction de répartition G_n de S_n .
- (b) Montrer que S_n est une variable aléatoire à densité et qu'elle admet pour densité la fonction g_n définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, g_n(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0 \\ n \cdot e^{-s} \cdot (1 - e^{-s})^{n-1} & \text{si } s > 0 \end{cases}.$$

- (c) Montrer – on pourra utiliser le changement de variable $u = 1 - e^{-s}$ dans l'intégrale exprimant naturellement l'espérance de S_n – que

$$\mathbb{E}(S_n) = \int_0^1 -\ln(1-u) \cdot n \cdot u^{n-1} \, du.$$

- (d) Montrer finalement que :

$$\mathbb{E}(S_n) = \int_0^1 \frac{u^n - 1}{u - 1} \, du = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = S_n - \ln(n)$.

- (a) Donner la fonction de répartition F_n de X_n
- (b) Montrer que, pour tout réel x , la suite $(F_n(x))$ converge vers $F_X(x)$, où X est la variable aléatoire définie en 2b.
- (c) On pose $u_n = \mathbb{E}(X_n)$. Après avoir donné un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, démontrer que la suite (u_n) est convergente vers une certaine limite que l'on note γ .

Solution :

1. Deuxième année, IV.2. La fonction de répartition d'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(T \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot t} & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. (a) La fonction f est clairement continue sur \mathbb{R} par composition car \exp est continue sur tout \mathbb{R} . La fonction f est clairement > 0 sur tout \mathbb{R} et enfin une primitive sur tout \mathbb{R} en est $F : x \mapsto \exp(-\exp(-x))$. Comme, par composition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\exp(-x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} -\exp(-x) = -\infty$$

alors, par composition toujours :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \exp(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

Cela montre que les intégrales $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ sont convergentes valant respectivement $F(0) - 0$ et $1 - F(0)$. On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{CV}{=} 1.$$

On en conclut alors que f est une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

- (b) Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité de probabilité. Soit F_X , sa fonction de répartition. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = [F(t)]_{-\infty}^x = F(x) - \underbrace{\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t)}_{=0} = \exp(-\exp(-x)).$$

3. (a) Soit G_n la fonction de répartition de S_n . La fonction F_T , fonction de répartition commune à chaque T_k est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(T \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \mathbb{P}(S_n \leq t) \\ &= \mathbb{P}(\{T_1 \leq t\} \cap \dots \cap \{T_n \leq t\}) \\ \text{[Indépendance des } T_k] &= \mathbb{P}(T_1 \leq t) \dots \mathbb{P}(T_n \leq t) \\ \text{[} F_T, \text{ f.rep. de } T_k] &= F_T(t)^n \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ (1 - e^{-\lambda t})^n & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

- (b) La formule $G_n = F_T^n$ montre que la fonction de répartition G_n est continue sur tout \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ car F_T l'est.

D'après le cours, S_n est donc une variable aléatoire à densité et une densité en est obtenue par dérivation (sauf aux quelques points litigieux où on peut imposer une valeur conventionnelle de 0), c'est à dire que g_n définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, g_n(s) = \begin{cases} G_n'(s) = 0 & \text{si } s < 0 \\ G_n'(s) = n \cdot e^{-s} \cdot (1 - e^{-s})^{n-1} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

est une densité de S_n . Ceci est à comparer avec la formule proposée :

$$\forall s \in \mathbb{R}, g_n(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0 \\ n \cdot e^{-s} \cdot (1 - e^{-s})^{n-1} & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

- (c) L'espérance de S_n , si elle existe est donnée par la formule

$$\mathbb{E}(S_n) = n \cdot \int_0^{+\infty} s \cdot e^{-s} \cdot (1 - e^{-s})^{n-1} ds.$$

pourvu que cette intégrale soit absolument convergente.

- Cette intégrale généralisée, d'intégrande positive, continue sur $[0, +\infty[$ est convergente par le théorème de comparaison pour les intégrales à intégrande positive (et donc ACV, vu le caractère positif de l'intégrande) car $\forall s \geq 0, 0 \leq 1 - e^{-s} \leq 1$ et donc

$$\forall s \in [0, +\infty[, 0 \leq s.e^{-s}.(1 - e^{-s})^{n-1} \leq s.e^{-s}$$

avec $\int_0^{+\infty} s.e^{-s} ds$ convergente d'après le cours (vaut 1 car espérance d'une v.a exponentielle de paramètre 1)

- Passons maintenant au calcul par changement de variable :

Effectuons le changement de variable proposé $u = 1 - e^{-s} = \phi(s)$ où ϕ est \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$, strictement croissante, $s = -\ln(1 - u)$, $s : 0 \rightarrow +\infty$, $u : 0 \rightarrow 1$ et $du \leftrightarrow \phi'(s) ds = e^{-s} ds$, pour obtenir :

$$\mathbb{E}(S_n) = \lim_{S \rightarrow +\infty} n. \int_0^S s.e^{-s}.(1 - e^{-s})^{n-1} ds = \lim_{U \rightarrow 1^-} \int_0^U -\ln(1 - u).n.u^{n-1} du = \int_0^1 -\ln(1 - u).n.u^{n-1} du.$$

- (d) Effectuons une intégration par parties sur cette intégrale généralisée en posant

$$v'(u) = n.u^{n-1}, v(u) = u^n - 1 \text{ et } w(u) = -\ln(1 - u), w'(u) = \frac{1}{1 - u}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^1 -\ln(1 - u).n.u^{n-1} du &= \lim_{U \rightarrow 1^-} \int_0^U -\ln(1 - u).n.u^{n-1} du \\ &= \lim_{U \rightarrow 1^-} \left(-(u^n - 1). \ln(1 - u) \Big|_0^U - \int_0^U \frac{u^n - 1}{1 - u} du \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u} du \end{aligned}$$

Cette i.p.p est légitimée par le fait que les fonctions v et w sont \mathcal{C}^1 sur $[0, 1[$, la suite du calcul provient du fait que $(u - 1) \ln(1 - u) \rightarrow 0$ lorsque $u \rightarrow 1$ (et donc le crochet a pour limite 0) et finalement du fait que l'intégrande de la dernière intégrale, sous ses airs singuliers en 1, cache un brave polynôme (intégrale faussement impropre) :

$$\frac{1 - u^n}{1 - u} = \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

On a donc

$$\mathbb{E}(S_n) = \int_0^1 \frac{u^n - 1}{u - 1} du = \sum_{k=0}^{n-1} u^k du = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k + 1}.$$

4. (a) Soit F_n la fonction de répartition de X_n . Comme S_n est à valeurs dans $[0, +\infty[$, X_n est à valeurs dans $[-\ln(n), +\infty[$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(S_n \leq x + \ln(n)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\ln(n) \\ \left(1 - e^{-(x + \ln(n))}\right)^n & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\ln(n) \\ \left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout n à partir d'un certain rang (qui dépend de x , quand $-\ln(n) \leq x$), on a

$$F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n = \exp\left(n. \ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)\right)$$

Or, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{n}e^{-x} \rightarrow 0$ et donc, par développement limité classique :

$$n. \ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right) = -n. \left(\frac{1}{n}e^{-x} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow -\exp(-x).$$

Donc, en passant à la limite dans \exp (qui est continue partout), on trouve que

$$F_n(x) \rightarrow \exp(-\exp(-x)) = F_X(x)$$

où F_X est la fonction de répartition de la v.a. X définie en 2b. On a donc convergence x par x de la suite des $(F_n(x))$ vers $F_X(x)$.

(c) On pose $u_n = \mathbb{E}(X_n)$. On a (question 3d et linéarité de l'espérance),

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \ln(n) \\ u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \ln(n+1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ [\text{DL } \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2(1+\epsilon(x))] &= \frac{1}{2n^2} (1 + \epsilon_n) \end{aligned}$$

où $\epsilon_n \rightarrow 0$. On en déduit (définition de limite) qu'à partir d'un certain rang :

$$0 \leq \frac{1}{4n^2} \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n^2}$$

et donc par le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs ($1/n^2 \geq 0$) que $\sum_{n \geq 1} u_{n+1} - u_n$ est de même nature que la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, c'est à dire convergente. La suite de ses sommes partielles est donc convergente et, par télescopie, cela implique que (u_n) est convergente.

Exercice sans préparation BL 2

Soit l'application linéaire (on admet cette propriété) $\phi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[x], \phi(P) = (P(1), P(2), P(3), P(4))$$

1. Donner la matrice de ϕ relativement aux bases canoniques de ses espaces de départ et d'arrivée.
2. Calculer $\ker(\phi)$ et en déduire que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Solution :

1. Il s'agit de la matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

2. Si $P \in \ker(\phi)$ alors P est un polynôme de degré ≤ 3 vérifiant $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$. Un polynôme de degré ≤ 3 admettant 4 racines distinctes est forcément nul et donc $P = 0$. On en déduit que $\ker(\phi) = \{0\}$ (l'autre inclusion est toujours vraie, le noyau est un sev de l'espace de départ.)
On en déduit que le noyau de la matrice Φ est lui aussi nul et donc, Φ étant carrée, que Φ est inversible.

Question supplémentaire : La matrice

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$$

est-elle inversible ?